

UTILIZZO DELLA LOGICA FUZZY PER L'ANALISI DELL'INCERTEZZA
ASSOCIATA AGLI ALBERI DEI GUASTI
Leonardo Zambolin, Marco Carcassi
Dipartimento di Ingegneria Meccanica, Nucleare e della Produzione
Via Diotisalvi 2 - 56126 Pisa - Fax 050-836654 - e-mail: carcassi@ing.unipi.it

SOMMARIO

L'analisi convenzionale di un albero dei guasti si basa sulla conoscenza delle densità di probabilità di rottura e dei ratei di guasto degli eventi base (foglie). In alcuni casi non si hanno dati sufficienti sui componenti del sistema e di conseguenza si hanno incertezze sui dati che possono rendere non significativo il valore di probabilità associato al Top Event.

L'utilizzo della logica Fuzzy permette di analizzare l'albero dei guasti incorporando negli eventi l'incertezza che accompagna un determinato fenomeno, in questo modo le relazioni classiche vengono trattate come relazioni fuzzy e al Top Event viene associata una funzione d'appartenenza che contiene maggiori indicazioni sulla sua incertezza.

Si utilizzeranno funzioni d'appartenenza triangolari per rappresentare la possibilità d'accadimento di un evento e le relazioni tra eventi e, tramite esse, si risalirà alla possibilità del Top Event. In questo caso sono rappresentati come eventi fuzzy quelli descritti tramite gli operatori logici utilizzati nelle porte di connessione OR e AND.

La teoria verrà applicata ad un caso di studio rappresentante un sistema di processo con i relativi sistemi di protezione.

Si faranno inoltre i confronti con i risultati forniti da un'analisi classica, in particolare con la probabilità d'accadimento del Top Event ricavata tramite una simulazione Montecarlo dell'albero dei guasti.

INTRODUZIONE

Nell'analisi convenzionale di un albero dei guasti si assume che le probabilità degli eventi vengano date in alcuni casi in maniera esatta, in altri in cui non si hanno dati sufficienti sui componenti del sistema o in cui il sistema stesso è molto complesso o non definibile in maniera precisa, vengono fornite incertezze sui dati talmente ampie che rendono spesso non significativo il valore associato al Top Event.

L'utilizzo della logica Fuzzy permette di analizzare l'albero dei guasti incorporando negli eventi stessi l'incertezza che accompagna un determinato fenomeno, in questo modo le relazioni classiche vengono trattate come relazioni Fuzzy e il Top Event viene rappresentato da una funzione d'appartenenza che dà maggiori indicazioni sull'incertezza ad esso associabile.

Le informazioni aggiuntive sono dovute all'analisi associata alla funzione d'appartenenza risultante per il Top Event e all'analisi possibilistica che accompagna l'utilizzo della logica Fuzzy, questa permette infatti di dare una maggiore credibilità ai fenomeni di quanto possa fare l'analisi probabilistica classica per **fenomeni di elevata complessità**.

L'utilizzo di tecniche "sfumate" quali la Fuzzy si rende necessario nel momento in cui le informazioni sui dati a disposizione sono insufficienti o incompleti, impedendo perciò un'analisi corretta della probabilità d'accadimento di un evento.

Si farà pertanto un confronto tra tre diversi modi di affrontare l'analisi degli alberi dei guasti:

1) Analisi classica, utilizzando per i ratei di guasto dei componenti valori ai quali non sia associata un'incertezza.

2) Analisi classica, considerando i ratei di guasto dei componenti aventi una distribuzione lognormale, per far ciò si utilizzerà una Simulazione Montecarlo.

3) Analisi Fuzzy, considerando le funzioni d'appartenenza dei componenti e gli indici di classificazione utilizzabili con tale logica.

ANALISI CLASSICA

Lo schema del sistema di processo preso in considerazione è il seguente:

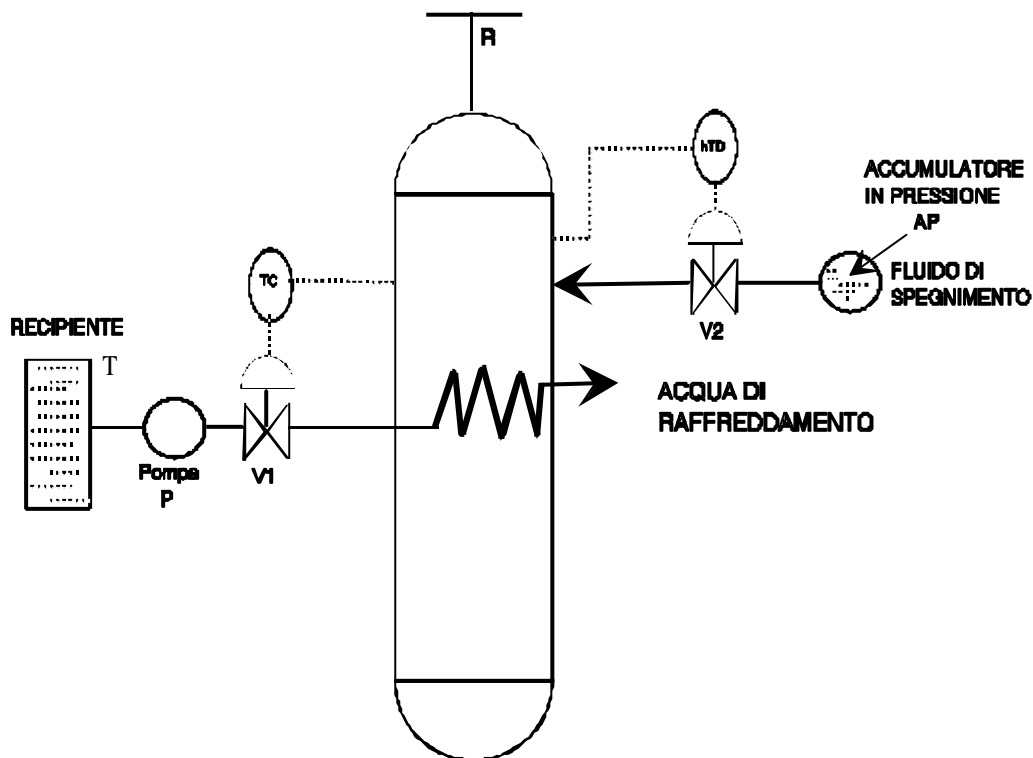


Fig. 1 Schema di un reattore e relativi sistemi di protezione

L'albero dei guasti relativo è:

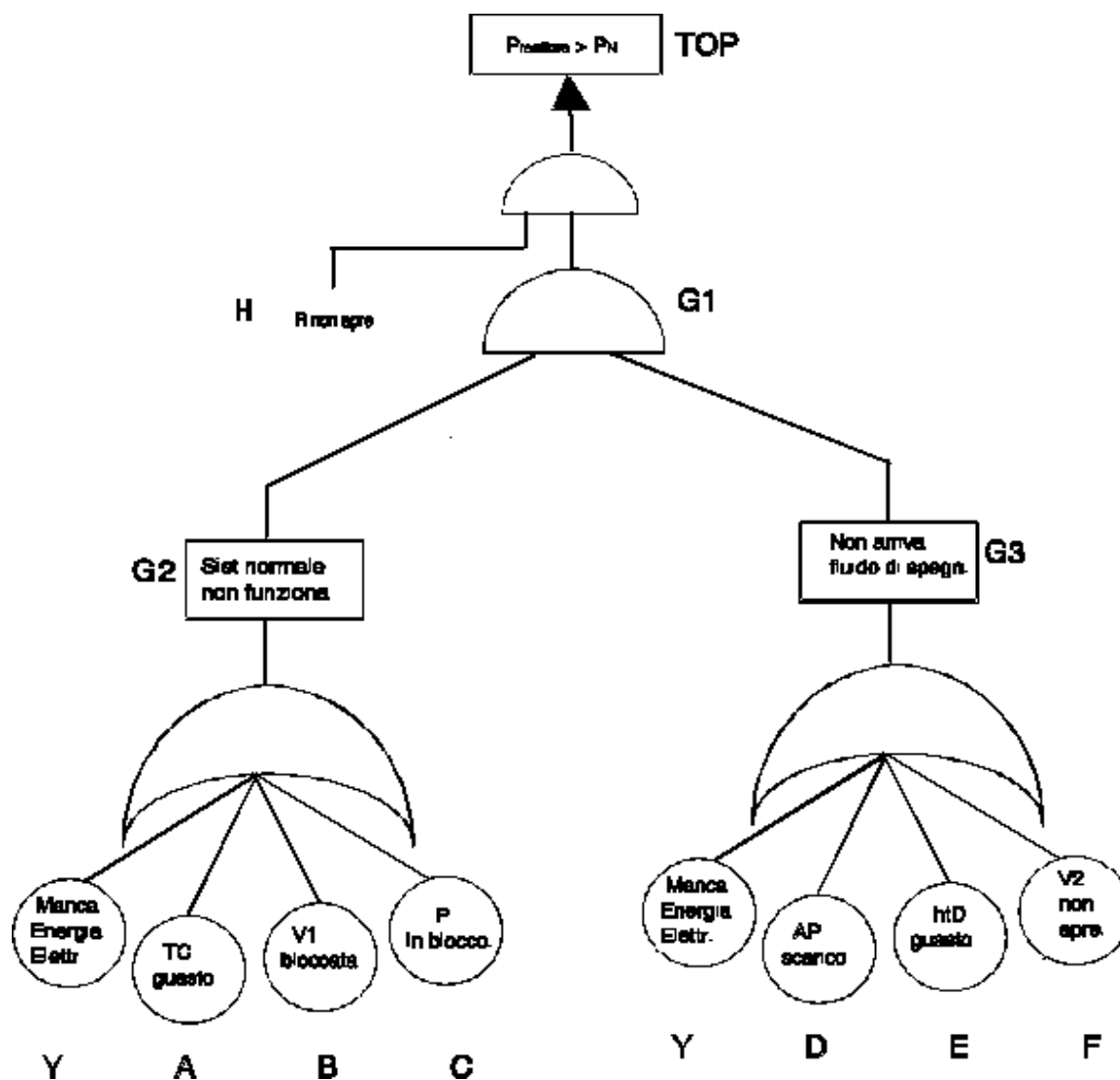


Fig. 2 Albero dei guasti relativo al reattore considerato

L'analisi logica dà come risultati:

$$\text{Top Event} = H * G1$$

$$G1 = G2 * G3$$

$$G2 = A + B + C + Y$$

$$G3 = D + E + F + Y$$

Sviluppando:

$$G1 = (A + B + C + Y) * (D + E + F + Y) = AD + AE + AF + AY + BD + BE + BF + BY + CD + CE + CF + CY + YD + YE + YF + YY$$

Considerando che:

$$YY = Y; Y + AY + BY + CY + YD + YE + YF \cong Y$$

Si ottiene: $G1 = AD+AE+AF+BD+BE+BF+CD+CE+CF+Y$

Top Event = $ADH+AEH+AFH+BDH+BEH+BFH+CDH+CEH+CFH+YH$

Si ha pertanto un Minimal Cut Set di ordine 2 e nove di ordine 3.

Per le componenti in esame i ratei di guasto riportati dalle banche dati sono:

Componente	Lower bound	Median value(M)	Upper bound
A	8,760E-03	8,760E-02	8,760E-01
B	1,095E-01	3,650E-01	1,095E+00
C	1,095E-01	3,650E-01	1,095E+00
Y	1,000E-02	1,000E-01	1,000E+00
D	1,000E-03	1,000E-02	1,000E-01
E	8,760E-04	8,760E-03	8,760E-02
F	1,095E-02	3,650E-02	1,095E-01
H	1,095E-03	3,650E-03	1,095E-02

Tab.1. Ratei di guasto in accadimenti/anno

Considerando i valori medi dei ratei di guasto e i Minimal Cut Set su riportati, si ottiene un valore per il Top Event (TE) pari a:

$TE = 5.299E-04$ acc/anno

Per avere delle informazioni sulle dispersioni dei risultati, una tecnica classica applicabile al caso in esame è la Simulazione Montecarlo. Questa consiste nella generazione di variabili casuali indipendenti che seguano il percorso logico dell'albero dei guasti e contemporaneamente assumano le caratteristiche, tramite media e deviazione standard, del rateo di guasto del singolo componente.

In base ai pareri degli esperti e ai dati disponibili in letteratura si sceglie di utilizzare una funzione di densità di probabilità di guasto per i componenti dell'impianto considerato, che abbia distribuzione lognormale.

I Numeri Random generati in modo Equiprobabile vengono inseriti nella formula di Box-Mûeller:

$$X_n = \left(\sqrt{-2 \ln u} \right) \cos 2\pi v \quad (1)$$

Tale funzione restituisce una variabile normale standard con media (μ_n) e varianza (σ_n^2), $X_n(\mu_n, \sigma_n^2)$ pari a [11]:

$$\mu_n = 0 \quad (2)$$

$$\sigma_n^2 = 1 \quad (3)$$

Il passaggio a una variabile con distribuzione lognormale $X_l (\mu_l, \sigma_l)$ avente le caratteristiche di guasto del componente considerato avviene facendo l'inversa come segue[9]:

$$X_l = \exp (X_n \sigma_l + \mu_l) \quad (4)$$

Per ottenere μ_l partendo dal valore mediano (M), considerando che $P(X > M)$ è la probabilità che la durata di vita del componente X superi il valore M, si procede come segue:

$$P(X > M) = 1/2 = P(e^{\mu_l} * e^{\sigma X_n} > M) \Rightarrow 1/2 = P[X_n > (\ln M - \mu_l) / \sigma_l] \quad (5)$$

Poiché la variabile normale standard X_n ha media pari a zero, deve essere:

$$(\ln M - \mu_l) / \sigma_l \Rightarrow \mu_l = \ln M \quad (6)$$

In questo modo siamo in grado di ricavare le informazioni necessarie per la variabile lognormale[10]:

$$\mu_{lj} = \ln(M) \quad (7)$$

$$\sigma_{lj} = \ln(\text{err}) / 1.645 \quad (8)$$

In cui err è il fattore d'errore pari a:

$$\text{err} = 95^\circ \text{ percentile} / M \quad (9)$$

Nell'analisi considerata il 95° percentile della distribuzione lognormale della probabilità di guasto dei componenti, coincide con l'Upper bound fornito dalle tabelle.

Si riportano di seguito i valori di μ_{lj} , σ_{lj} e del fattore d'errore dei vari componenti considerati nella simulazione Montecarlo:

Componente	sigmalogn	mulogn	fattore d'errore
A	1,400E+00	-2,435E+00	10
B	6,678E-01	-1,008E+00	3
C	6,678E-01	-1,008E+00	3
Y	1,400E+00	-2,303E+00	10
D	1,400E+00	-4,605E+00	10
E	1,400E+00	-4,738E+00	10
F	6,678E-01	-3,310E+00	3
H	6,678E-01	-5,613E+00	3

Tab. 2 Parametri delle probabilità di guasto dei vari componenti

Utilizzando un compilatore C++ si è ottenuto il grafico che fornisce i valori dei Top Event relativi all'albero dei guasti considerato:

top_event minimo : 1.026504e-05

top_event massimo : 0.931638

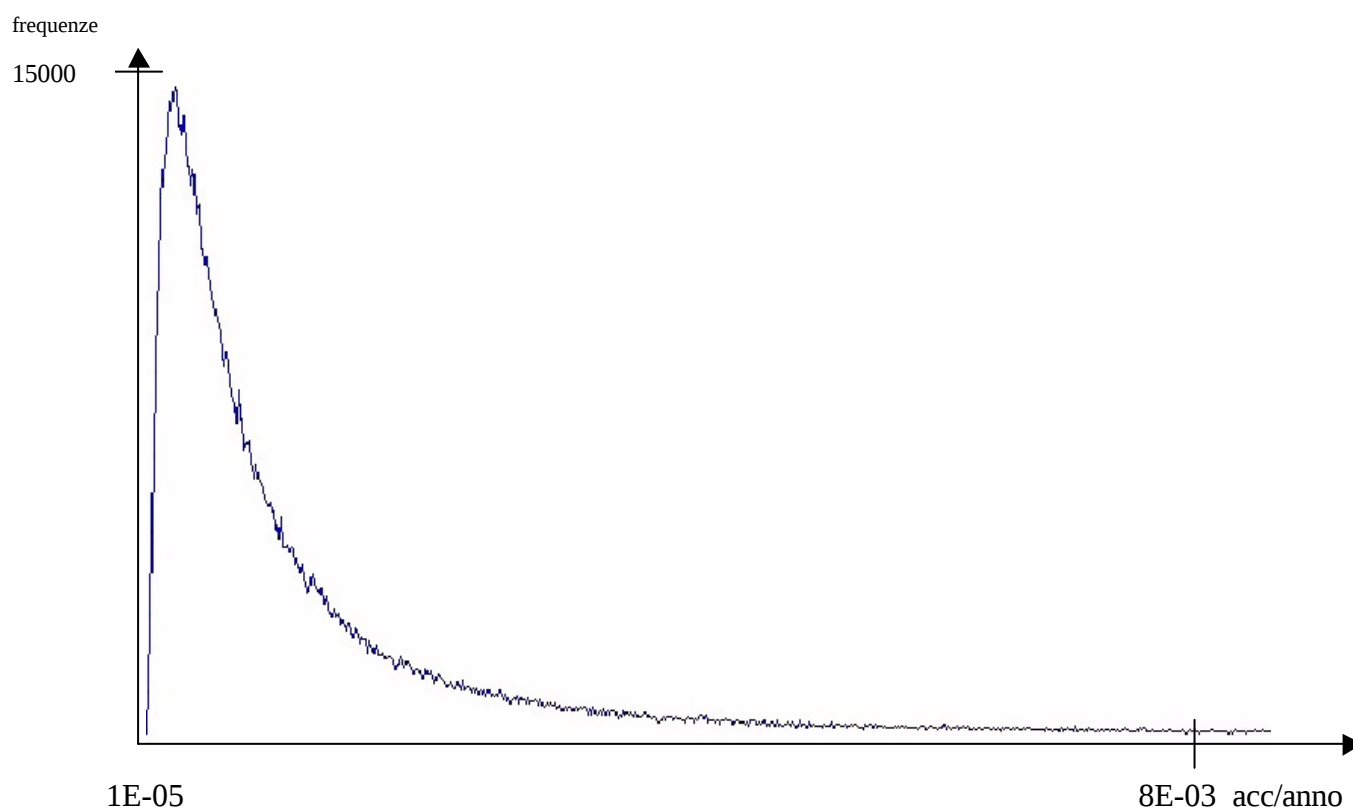


Fig. 3 Distribuzione delle frequenze per la probabilità d'accadimento del Top Event

Per un livello di confidenza tra il 5% e il 95% si ha una probabilità d'accadimento del TE compresa tra: 7.345E-5 e 1.263E-2

La distribuzione risultante per il TE è una lognormale, come ci si aspettava dal fatto di avere dei ratei di guasto che hanno una distribuzione lognormale e dall'aver utilizzato 250000 variabili casuali nella simulazione Montecarlo che ha potuto quindi seguire la legge dei grandi numeri.

ANALISI FUZZY

Con questo tipo di logica i ratei di guasto vengono considerati come numeri Fuzzy, i quali incorporano in sé l'incertezza di cui è affetta la probabilità di guasto del componente.

La tipologia di numeri Fuzzy utilizzata prevede per questi una forma triangolare convessa per motivi di semplicità e soprattutto per il fatto che si è voluta simulare una situazione in cui non si è in possesso di dati precisi sui ratei di guasto dei componenti. E' chiaro che nel caso in cui le informazioni lo consentissero, si potrebbe estendere la tecnica utilizzata a numeri Fuzzy di forma diversa, ad esempio trapezoidale [6].

Un numero Fuzzy è un insieme Fuzzy continuo nell'universo $\mathfrak{R}$ dei reali caratterizzato dalla sua funzione d'appartenenza definita come segue [1], [7], [4]:

$$\mu(x) = \begin{cases} 0 & x \leq a \\ (x-a)/(b-a) & a \leq x \leq b \\ (c-x)/(c-b) & b \leq x \leq c \\ 0 & x > c \end{cases} \quad (10)$$

In forma grafica si ha:

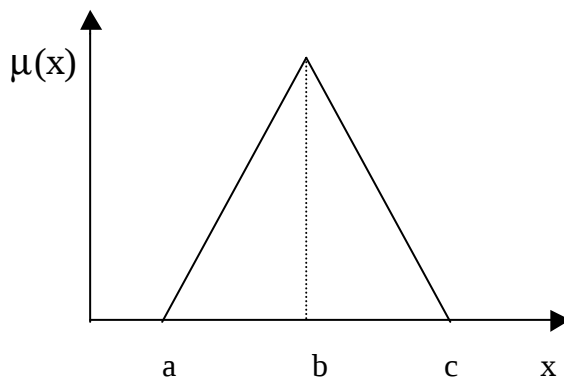


Fig. 4 Rappresentazione grafica di un numero Fuzzy

Applicando ad esempio al componente A la definizione su riportata, si ottiene il seguente grafico:

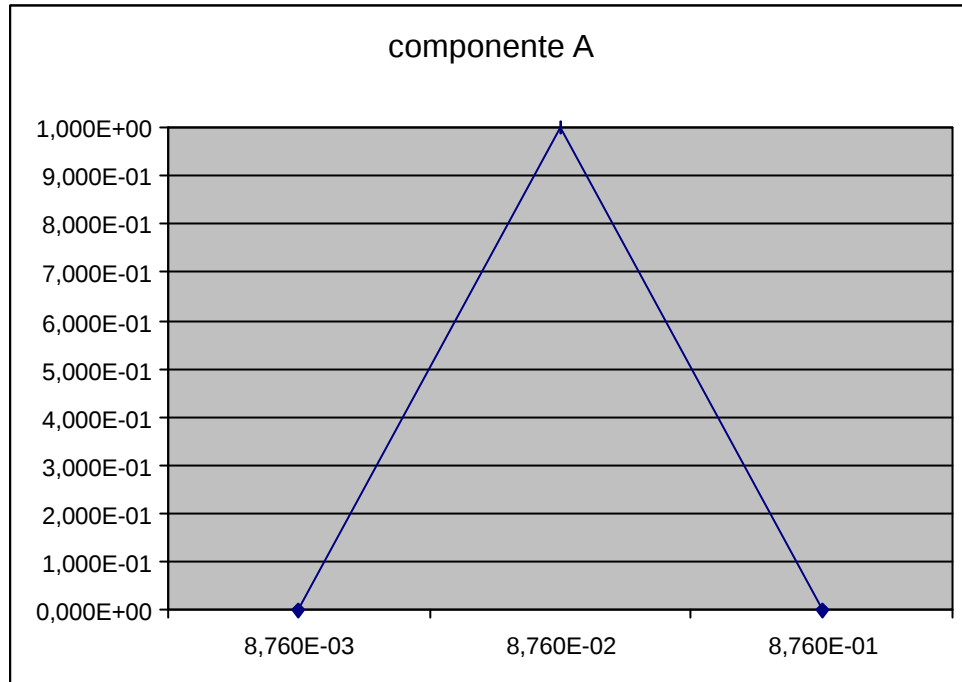


Fig. 5 Rappresentazione grafica Fuzzy del componente A

Considerando due numeri Fuzzy A_1 e A_2 aventi funzioni d'appartenenza f_{A_1} e f_{A_2} e tenendo presente il principio di estensione di Zadeh, la funzione d'appartenenza del numero Fuzzy $B = f(A_1, A_2)$ è [2]:

$$f_B(y) = \sup \min (f_{A_1}(x_1), f_{A_2}(x_2)) \quad (11)$$

La somma Fuzzy di due numeri triangolari Fuzzy $A_i = (c_i, a_i, b_i)$ e $A_j = (c_j, a_j, b_j)$, è a sua volta un numero Fuzzy:

$$A_i \oplus A_j = (c_i + c_j, a_i + a_j, b_i + b_j) \quad (12)$$

La differenza tra i due numeri su riportati è:

$$A_i \ominus A_j = (c_i - b_j, a_i - a_j, b_i - c_j) \quad (13)$$

Allo stesso modo la moltiplicazione Fuzzy tra i due numeri Fuzzy prima definiti (con $c_i > 0$) ha funzione d'appartenenza:

$$f_{A_i \ A_j}(x) = \begin{cases} -H_1 + [H_1^2 + (x - Y)/T_1]^{1/2} & Y \leq x \leq Q \\ -H_2 + [H_2^2 + (x - Z)/U_1]^{1/2} & Q \leq x \leq Z \\ 0 & \text{altrimenti} \end{cases} \quad (14)$$

In cui :

$$T_1 = (a_i - c_i) (a_j - c_j) \quad (15)$$

$$U_1 = (b_i - a_i) (b_j - a_j) \quad (16)$$

$$H_1 = T_2 / 2T_1 \quad (17)$$

$$T_2 = c_i (a_j - c_j) + c_j (a_i - c_i) \quad (18)$$

$$U_2 = b_j (a_i - b_i) + b_i (a_j - b_j) \quad (19)$$

$$H_2 = - U_2 / U_1 \quad (20)$$

$$Y = c_i c_j \quad (21)$$

$$Q = a_i a_j \quad (22)$$

$$Z = b_i b_j \quad (23)$$

E' noto che:

$$\forall w \in [0, 1], \exists x_i, x_j \in \mathfrak{R} \mid w = f_{A_i}(x_i) = f_{A_j}(x_j) \quad (24)$$

Considerando la parte crescente della funzione si ha:

$$x = x_i x_j = w^2 (a_i - c_i) (a_j - c_j) + w c_j (a_i - c_i) + w c_i (a_j - c_j) + c_i c_j \quad (25)$$

Similmente per la parte decrescente:

$$x = x_i x_j = w^2 (a_i - b_i) (a_j - b_j) + w b_j (a_i - b_i) + w c_i (a_j - b_j) + b_i b_j \quad (26)$$

Risolvendo le equazioni (25) e (26) si ottiene la funzione d'appartenenza:

$$w = f_{A_i \cup A_j}(x) \quad (27)$$

Il numero Fuzzy con tale funzione d'appartenenza non ha forma triangolare, ma si può fare una maggiorazione che semplifichi la sua forma nonché il suo calcolo:

$$w^2 \cong w \quad (28)$$

Tale approssimazione è valida in particolare in prossimità di 1. In questo modo si ottiene:

$$A_i \cup A_j \cong (c_i \cup c_j, a_i \cup a_j, b_i \cup b_j) = A_i \otimes A_j \quad (29)$$

$$A_i \cup A_j \leq A_i \otimes A_j \quad (30)$$

Questa maggiorazione sovrastima la possibilità di guasto del componente e di conseguenza anche quella d'accadimento del Top Event.

Tenendo conto delle leggi di De Morgan, gli operatori AND e OR danno i risultati Fuzzy:

$$\text{AND} \quad P_A = P_{E1} \otimes P_{E2} \otimes \dots \otimes P_{En} \quad (31)$$

$$\text{OR} \quad P_O = 1 \ominus (1 \ominus P_{E1}) \otimes (1 \ominus P_{E2}) \otimes \dots \otimes (1 \ominus P_{En}) \quad (32)$$

Utilizzando degli α -cut di passo 0,1 e i Minimal Cut Set calcolati per l'analisi classica, si ottengono i valori dei TE con ad essi associati i gradi d'appartenenza.

Il grafico relativo ai risultati ottenuti è il seguente:

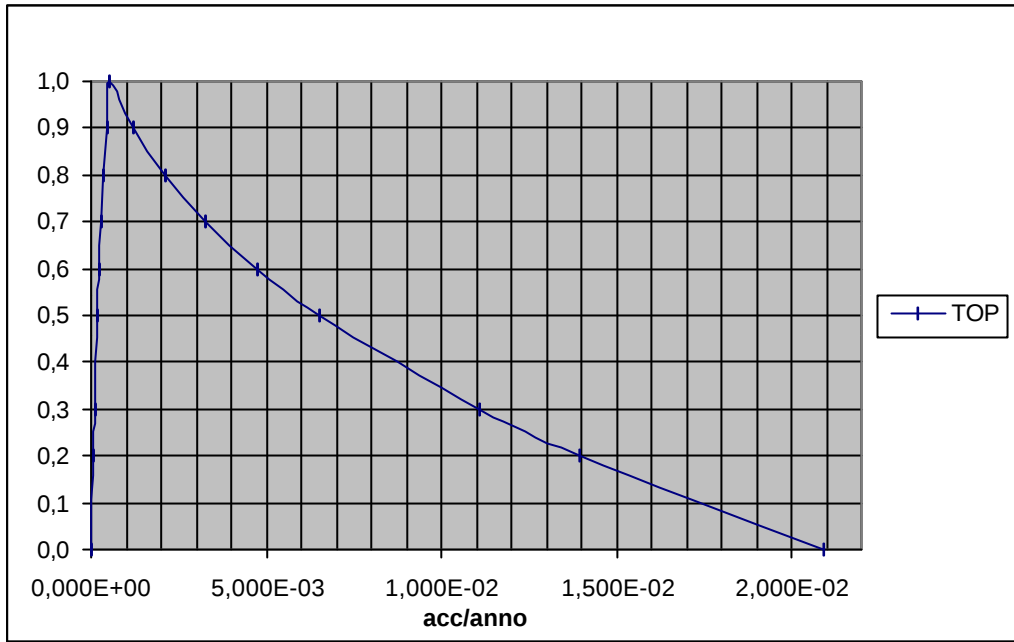


Fig. 6 Rappresentazione Fuzzy del Top Event

Si ricava in particolare che per un grado d'appartenenza di 0,9 il TE ha valori tra 4,40E-04 e 1,19E-03 acc/anno.

Tali valori indicano che in tale range la possibilità d'accadimento del TE ha COMPATIBILITA' pari a 0,9 rispetto all'insieme: "accadimento del guasto: eccessiva pressione nel Vessel" [8].

Si possono considerare inoltre gli indici di classificazione Fuzzy FIM e FUIM, il primo indica quale componente ha avuto il maggior peso nel calcolo del TE, il secondo dice quale componente ha maggiormente contribuito alla dispersione finale dei risultati, cioè dove maggiore sia l'incertezza che grava sul risultato finale. Indicando con q_i l'indisponibilità del componente i -esimo, la probabilità d'accadimento del TE, ipotizzando che il componente i -esimo sia completamente indisponibile ($q_i=1$), è [3], [5]:

$$Q_{q_i=1} = f(q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, 1, q_{i+1}, \dots, q_n) \quad (33)$$

E allo stesso modo col componente i -esimo completamente disponibile ($q_i=0$) si ha:

$$Q_{q_i=0} = f(q_1, q_2, \dots, q_{i-1}, 0, q_{i+1}, \dots, q_n) \quad (34)$$

La Misura di Importanza Fuzzy (FIM) è definita come segue:

$$FIM_i = ED[Q_{q_i=1}, Q_{q_i=0}] \quad (35)$$

In cui $ED[A, B]$ indica la distanza euclidea tra due insiemi fuzzy A e B calcolata servendosi di un numero i di α -cut:

$$ED[A, B] = \sum_{a_i=1,2,\dots,N} ((a^L - b^L)^2 + (a^U - b^U)^2)^{0.5}_{a_i} \quad (36)$$

Nel caso considerato l'indice FIM fornisce i seguenti risultati:

FIM	componente	classificazione
1,185E-02	A	6
1,185E-02	B	6
1,185E-02	C	6
6,755E-02	Y	5
1,302E-01	D	2
1,302E-01	E	2
1,302E-01	F	2
7,775E+00	H	1

Tab. 3 Indice di Importanza Fuzzy per i componenti considerati

Si nota perciò che il componente H dà il maggior contributo nella determinazione del Top Event. A titolo d'esempio si può osservare come si modifichi il valore fuzzy del TE se un componente avesse disponibilità nulla o totale:

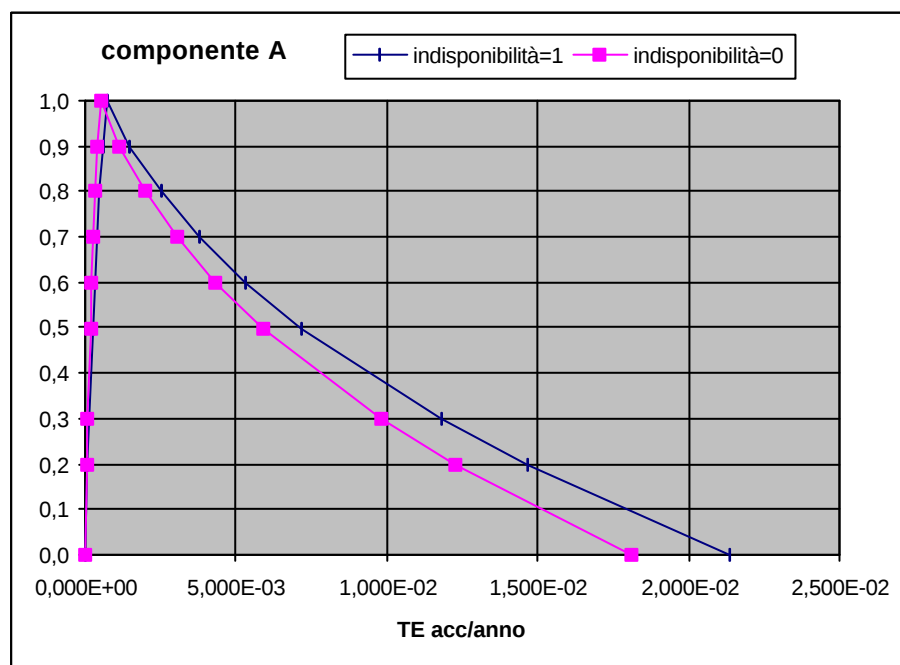


Fig. 7 Variazione del Top Event al variare della disponibilità del componente A

La Misura dell'Importanza dell'Incertezza Fuzzy (FUIM) è data da:

$$FUIM_i = ED[Q, Q_i] \quad (37)$$

In cui Q indica la possibilità d'accadimento del TE a un determinato α -cut e Q_i la possibilità d'accadimento del TE nel caso in cui il componente i -esimo non abbia indeterminatezza, cioè nel caso in cui sia dato come valore preciso.

Per l'impianto considerato l'indice FUIM dà i risultati di seguito riportati:

FUIM	componente	classificazione
6,249E-03	A	5
5,787E-03	B	7
5,787E-03	C	7
3,076E-02	Y	2
7,566E-03	D	3
6,628E-03	E	4
6,139E-03	F	6
3,641E-02	H	1

Tab. 4 Indice di Importanza dell'Incertezza Fuzzy per i componenti considerati

Come si vede il componente H è il responsabile anche della maggiore indeterminatezza che caratterizza il Top Event, mentre la classificazione degli altri componenti cambia rispetto a quella FIM. Ciò indica, com'era ovvio, che il componente che più pesa sul valore finale del Top Event non è detto che sia anche il responsabile principale dell'incertezza associabile al Top Event stesso.

In maniera analoga a quanto precedentemente fatto si può analizzare come cambi il valore del TE nel caso in cui un componente non abbia nessuna incertezza associata:

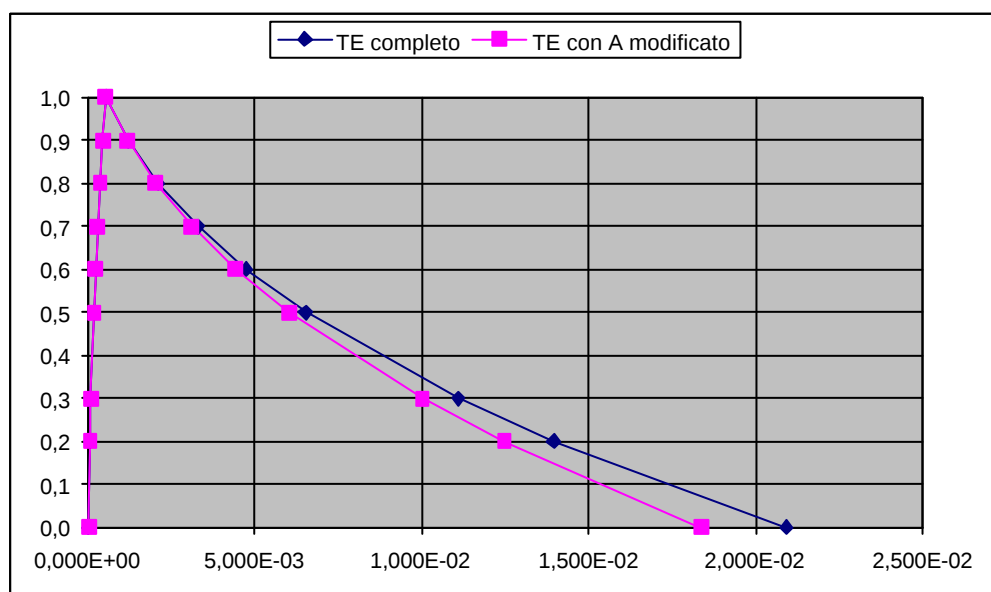


Fig. 8 Variazione del Top Event al variare dell'incertezza del componente A

E' importante sottolineare il fatto che le misure su riportate non danno indicazioni assolute sull'incertezza ma forniscono una importante classificazione tra i componenti presi in esame per l'albero dei guasti, ciò permette di capire quale componente necessiti di maggiori attenzioni ancor più se gli indici di classificazione lo pongono ai primi posti contemporaneamente.

Analizzando i due indici calcolati i componenti decisivi per la determinazione del Top Event e dell'incertezza ad esso associata vengono messi in risalto dal seguente grafico:

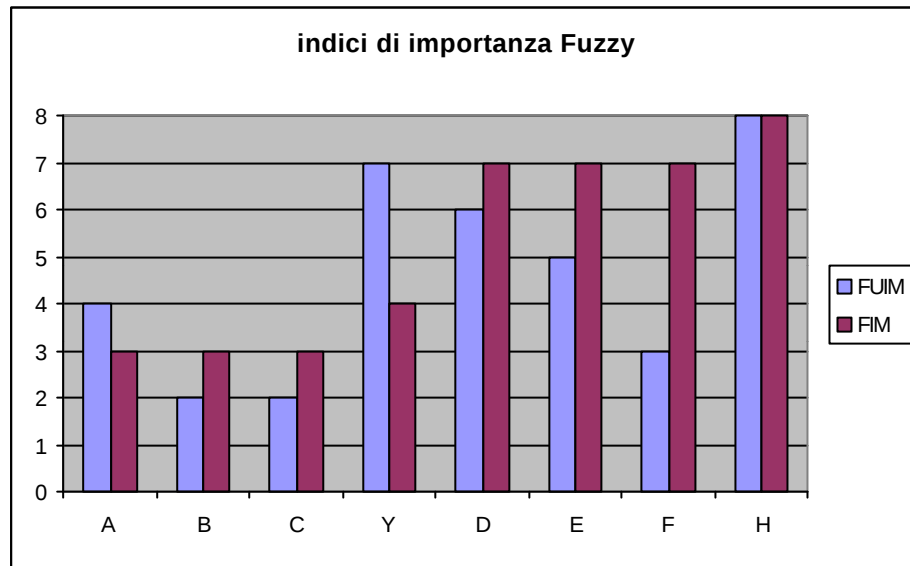


Fig. 9 Componenti messi a confronto in base agli indici FIM e FUIM

CONCLUSIONI

Il primo metodo classico analizzato, non considerando le dispersioni, dà il valore della probabilità d'accadimento del Top Event, ma chiaramente non dice nulla sulla dispersione dei risultati né sull'incertezza. Da questo punto di vista una simulazione Montecarlo fornisce maggiori informazioni in quanto viene stabilito che per un determinato livello di confidenza la probabilità d'accadimento stia entro determinati valori. Per la natura stessa del concetto probabilistico si ha perciò che per avere un'area abbastanza ampia (probabilità) sotto la curva, bisogna considerare valori del top Event che ricoprono spesso un range troppo ampio per essere significativo.

E' questo uno dei motivi per cui nelle relazioni riguardanti l'analisi del rischio si preferisce sovente dare valori linguistici (rischio alto, medio, basso) senza associare a questi valori numerici, ma dando per l'appunto solo un'indicazione del danno (e della probabilità d'accadimento di un certo evento).

L'analisi Fuzzy utilizzando concetti possibilistici riesce a dare informazioni aggiuntive rispetto all'analisi classica, infatti il grado di appartenenza associato al Top Event dice quanto sia compatibile con l'insieme Top Event il range di valori presi in considerazione.

L'analisi Fuzzy non dà un valore diverso di probabilità o della sua incertezza, ma dà una misura della evidenza (sia nella sua accezione possibilistica [8]) associata a un determinato insieme di valori. Perciò se un evento ha una probabilità associata a un certo range di valori che abbia un basso grado di appartenenza ricavato dall'analisi Fuzzy, significa che quel valore non ha una credibilità accettabile.

A differenza dell'analisi classica si può perciò caratterizzare un evento associando ad esso non solo un valore rappresentante la probabilità d'accadimento, ma anche una misura Fuzzy di compatibilità.

Così come per la distribuzione lognormale, utilizzata per rappresentare la densità di probabilità di guasto dei componenti, anche la forma e i valori dei numeri Fuzzy utilizzati sono il legati a una scelta iniziale. Tale scelta viene fatta in base all'esperienza del fenomeno e ai dati a disposizione ed è concorde col concetto Bayesiano di dare a un determinato fenomeno una connotazione frutto di una elaborazione personalizzata.

Da questo punto di vista l'utilizzo della logica Fuzzy permette di fare un passo avanti dal momento che, a differenza dell'analisi probabilistica classica, l'incertezza si concentra solo nei dati iniziali e non aumenta man mano che si procede nel calcolo delle porte AND e OR dell'albero dei guasti.

Infine la semplicità del procedimento consente una maggiore velocità e trasparenza nella determinazione dei risultati.

Ulteriori approfondimenti dell'argomento potrebbero riguardare l'individuazione di un valore di soglia al di sopra del quale sia preferibile utilizzare un approccio possibilistico piuttosto che classico, tale valore dipenderebbe logicamente dal grado di complessità del fenomeno e dai dati a disposizione.

BIBLIOGRAFIA

1. T. J. Ross, Fuzzy Logic With Engineering Application, McGraw-Hill, Inc., 1995.
2. G.S. Liang and M.J Wang, Fuzzy Fault-Tree Analysis Using Failure Possibility, *Microelectron. Reliab*, vol 33(4), pp. 583-597, 1993.
3. P.V. Suresh, A.K. Babar and V. Venkat Raj, Uncertainty in Fault Tree Analysis: A Fuzzy Approach, *Fuzzy Set and System*, vol 83, pp.135-141, 1996.
4. D. Singer, A Fuzzy Set Approach to Fault Tree and Reliability Analysis, *Fuzzy Set and System*, vol 34, pp.145-155.
5. A. C. F. Guimar es and N. F. F. Ebecken, FuzzyFTA: a Fuzzy Fault Tree System for Uncertainty Analysis, *Annals of Nuclear Energy*, vol. 26, pp. 523-532, 1999.
6. H. Tanaka, L. T. Fan, F. S. Lai and K. Toguchi, Fault-Tree Analysis by Fuzzy Probability, *IEEE Trans. Reliability*, vol. 32, pp.453-457, 1983.
7. H. S. Pan and W. Y. Yun, Fault Tree Analysis with Fuzzy Gates, *Computer ind. Engng*, vol 33, Nos 3-4, pp. 569-572, 1997.
8. D. Dubois and H. Prade, An Approach to Computerized Processing of Uncertainty, CNRS, Plenum Press, New York, 1988.
9. J. Aitchison and J.A.C. Brown, The Lognormal Distribution, Cambridge: Cambridge University Press, 1957.
10. D.F Cooper, Lognormal Distribution Summary, sito web <http://www.Broadleaf.com.au>, Broadleaf Capital International Pty Ltd, 1999.
11. M.R. Spiegel, Probabilità e Statistica, ETAS Libri, 1979.