

UNIVERSITA' DEGLI STUDI DI PISA
Dipartimento di Ingegneria Meccanica Nucleare e della Produzione
Studio dell'applicazione della Teoria dell'Evidenza come Tecnica di Analisi
del Rischio Industriale

G.M. Cerchiara , M.N. Carcassi , L. Zambolin.

Introduzione.

La Teoria della Possibilità è uno strumento d'indagine applicabile a problematiche complesse, storicamente ha radici antiche, infatti linguisticamente uno dei primi ad occuparsi di definire e caratterizzare gli eventi fu Aristotele, per una prima formalizzazione matematica della teoria bisogna invece attendere oltre la metà del XX secolo. Infatti con l'avvento della Teoria della Logica Fuzzy, avutasi agli inizi degli anni settanta grazie al matematico Lofti Zadeh, si sono gettate le basi per lo sviluppo formale della Teoria della Possibilità o dell'Evidenza.

Il principio per il quale l'utilizzo di un modello logico – linguistico di un problema complesso, piuttosto di un approccio tramite modelli classici rigorosi, porta ad un risultato del problema più preciso, è stata avvallata da evidenza sperimentale in molti campi, dalla progettazione e gestione di sistemi di controllo per elettrodomestici a quelli per impianti convenzionali e non, dalla pianificazione e controllo del traffico metropolitano ed aereo all'individuazione di efficienti criteri di valutazione sismici.

L'estrema malleabilità delle tecniche offerte dalla Teoria dell'Evidenza, permette di affrontare i problemi più disparati con l'unica prescrizione, che sta alla base di ambedue le Teorie di Logica Fuzzy e dell'Evidenza, che consiste nel demandarne l'utilizzo ad esperti nel settore d'indagine del problema trattato.

In questo senso, la tendenza generale è di supportare le suddette teorie con modelli di sistemi di intelligenza artificiale (ad esempio Reti Neurali ed Algoritmi Genetici), con lo scopo di creare un sistema che, opportunamente erudito, arrivi (in un lontano futuro) a interagire attivamente con l'esperto; il risultato sono modelli ibridi, (ad esempio Neuro – Fuzzy) molti, per il momento, ancora in via di sperimentazione.

Premessa.

Nel seguente lavoro saranno illustrate le basi della Teoria della Possibilità (denominata anche Teoria dell'evidenza), con particolare riferimento alle potenziali applicazioni, in ambito di Analisi del Rischio Industriale, in cui la predetta teoria può risultare un utile strumento d'indagine. In principio saranno analizzate le grandezze di Possibilità, Necessità, Plausibilità e Credibilità, che caratterizzano la teoria generale, con particolare riferimento al tipo di problematiche caratterizzabili tramite le predette grandezze. Si darà una definizione di ignoranza relativa ad un problema con l'ausilio della misura di Credibilità, ciò permetterà l'individuazione dei campi di applicazione della teoria generale. Proseguendo verranno definite le Distribuzioni di Possibilità e Necessità come limiti superiore ed inferiore Probabilità. Infine la teoria verrà utilizzata, unitamente alla tecnica dell'Albero degli Eventi, per l'analisi di un semplice impianto. Concludendo verranno mostrati i risultati consistenti nell'individuazione dei limiti superiore ed inferiore della probabilità di accadimento dell'evento iniziatore considerato nell'esempio dell'impianto trattato e le possibilità di applicazione della teoria congiuntamente alle tecniche dell'Albero degli Eventi e dei Guasti.

1.1 – Le Misure dell'Evidenza.

La Teoria della Possibilità definisce quattro grandezze, la Necessità, la Possibilità, la Credibilità e la Plausibilità [1] [2], che sono la generalizzazione concettuale e matematica della Probabilità, per la trattazione di problemi con un alto grado di complessità.

Un problema è definito complesso quando si verifica che i suoi parametri non siano schematizzabili in maniera rigorosa, oppure siano vaghe le relazioni tra loro intercorrenti od ancora quando alcuni di questi siano sconosciuti. Laddove l'ignoranza associata ai parametri del problema è diversa da zero, si avrà che la grandezza Probabilità non sarà sufficiente a descrivere il problema stesso. Se si considerasse il problema di determinare la temperatura atmosferica in un dato punto di un dato luogo oppure l'umore di una persona un dato giorno, la Probabilità non sarebbe in grado di rispondere in modo completo al quesito e la soluzione del problema lascerebbe a desiderare quanto a precisione. Partendo dall'ipotesi aristotelica che se un evento è necessario il suo contrario è impossibile, si definisce la Necessità come la misura di possibilità di un evento per il quale, non solo sussistono i presupposti perché accada ma le condizioni sono tali da rendere inevitabile il suo verificarsi. Una grandezza che esprime un concetto più debole della Necessità, è la Possibilità che viene definita per un evento per il quale sussistano i presupposti di accadimento. E' naturale esprimere, in maniera soggettiva, vari gradi di Necessità e di Possibilità, per un evento è quindi possibile definire, tramite le due misure suddette, la certezza e l'incertezza associata all'evento stesso.

La differenza sostanziale tra incertezza ed imprecisione è che la prima dipende dall'ignoranza associata al problema (complesso), la seconda prescinde dall'ignoranza ed è connessa alle valutazioni e misure sui parametri del problema.

La Credibilità e la Plausibilità sono misure specificamente epistemologiche dell'evento, si riferiscono concettualmente rispettivamente alla Necessità ed alla Possibilità e vengono definite su di un insieme di conoscenze di un evento secondo la tecnica logica dell'inferenza. Quest'ultima può essere di due tipi, deduttiva ed induttiva, da questo concetto ne segue che tutto ciò che può essere dedotto dall'insieme di conoscenze di un evento è credibile, tutto ciò che non è in contraddizione con il suddetto insieme è plausibile. In ambito di imprecisione, se si considera una misura di una grandezza G di magnitudine M ed un intervallo I di valori al quale M deve appartenere, si potrà scrivere che [2]:

$$G \in I \text{ è possibile se } M \cap I \neq \emptyset ; G \in I \text{ è necessario se } M \subseteq I .$$

I concetti di possibilità e necessità possono essere generalizzati considerando l'incertezza invece dell'imprecisione. Nel prossimo paragrafo saranno trattate le misure di Credibilità e Plausibilità di un evento, le relazioni che hanno con la Probabilità e la Teoria dell'Evidenza.

1.2 – La Credibilità e la Plausibilità.

Le due misure fuzzy che, dato un insieme di conoscenze, permettono di definire l'evidenza di un evento in maniera deduttiva ed induttiva, sono rispettivamente la Credibilità e la Plausibilità. Tutto ciò che si conosce (anche in modo non completo) di un fenomeno rappresenta l'evidenza ad esso associata, tutto ciò che si può dedurre dall'evidenza legata al fenomeno rappresenta la sua Credibilità (inferenza deduttiva), quello che, al contrario, non è in contrasto con l'evidenza del fenomeno si identifica con la sua Plausibilità (inferenza induttiva). Data la definizione di Credibilità, si può dedurre facilmente che l'ignoranza associata ad un evento complesso A , appartenente ad un universo X di eventi, è quell'insieme di suoi stati possibili e non, compresi tra ciò che è credibile di A e ciò che è credibile di $\bar{A}$, in formule si avrà [4]:

$$\text{ignoranza} (A) = 1 - [\text{Cr} (A) + \text{Cr} (\bar{A})] \quad [1.1]$$

con $Cr(A)$ = Credibilità associata all'evento A ; Rispetto alla definizione di Plausibilità si ha:

$$ignoranza(A) = [Pl(A) + Pl(\bar{A})] - 1 \quad [2.1]$$

con $Pl(A)$ = Plausibilità associata all'evento A . Per chiarezza in fig. 1 è rappresentato l'universo X , l'insieme di stati che danno l'evidenza di A e di $\bar{A}$, nel caso di un evento non complesso (insieme classico) $[A_{nc}; \bar{A}_{nc}]$ e complesso (insieme fuzzy) $[A_c; \bar{A}_c]$:

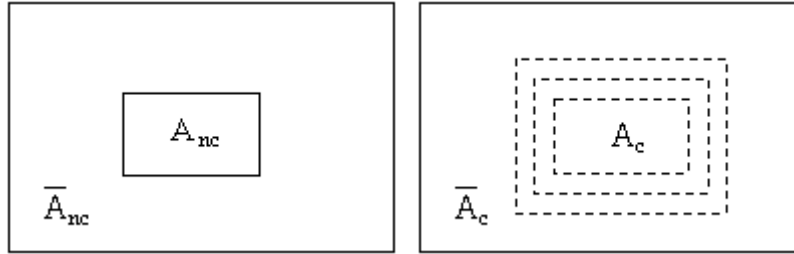


Fig. 1 – Rappresentazione grafica dell'ignoranza su di un evento complesso A_c

Quando l'evento non è complesso $[A_{nc}]$ si ha che l'ignoranza è pari a zero dalle equazioni 1.1 e 2.1 si ha:

$$1 - [Cr(A_{nc}) + Cr(\bar{A}_{nc})] = [Pl(A_{nc}) + Pl(\bar{A}_{nc})] - 1 = 0 \quad [3.1]$$

$$[Cr(A_{nc}) + Cr(\bar{A}_{nc})] = [Pl(A_{nc}) + Pl(\bar{A}_{nc})] = 1 \quad [4.1]$$

$$Cr(A_{nc}) = Pl(A_{nc}) = Pr(A_{nc}) \quad [5.1]$$

Con $Pr(A_{nc})$ = Probabilità dell'evento (A_{nc}) , infatti:

$$Pr(A_{nc}) + Pr(\bar{A}_{nc}) = 1. \quad [6.1]$$

Partendo dalla definizione concettuale di Credibilità e di Plausibilità si è arrivati a definirle in formule, la relazione che lega le due grandezze in oggetto è quella che verifica ambedue le equazioni 1.1 e 2.1, si avrà:

$$Pl(A) = 1 - Cr(\bar{A}) \quad [7.1]$$

$$Cr(A) = 1 - Pl(\bar{A}) \quad [8.1]$$

La Credibilità e la Plausibilità sono definite anche in termini di funzioni che godono di alcune proprietà fondamentali. Si consideri un insieme $A \equiv [a, b, c]$ con un numero $A_n = 3$ di elementi, il Power set di A chiamato P_A avrà un numero di elementi P_{A_n} pari a 2^{A_n} , chiamati Elementi Focali tale che $P_A \equiv [(\emptyset), (a), (b), (c), (a, b), (a, c), (b, c), (a, b, c)]$. Si consideri x un elemento di un universo X , si assegni un valore di appartenenza di x a ciascuno degli sotto insiemi $A \subset P_X$ [P_X = Power set di X] in base alla conoscenza che si ha del fenomeno x . In tal modo si avrà una mappa della credibilità di x misurata in termini di appartenenza, da una funzione $g(A)$ con A il generico sottinsieme di P_X . La Credibilità e la Plausibilità saranno delle funzioni $g(A)$ tali che

$$g: P(x) \rightarrow [0, 1]; \quad [9.1]$$

Essendo $g(A)$ un insieme di valori che esprime il grado di appartenenza di x ai vari insiemi (classici, non fuzzy) A , rappresenta la vaghezza (ignoranza) associata al fenomeno x in termini di Credibilità, se l'analisi sull'appartenenza di x ad i vari insiemi A è stata di tipo deduttivo, di Plausibilità, se è stata invece di tipo induttivo. La funzione $g(A)$ gode delle seguenti proprietà:

$$\begin{aligned} g(\emptyset) &= 0; \quad g(X) = 1; \\ \text{se } A, B \in P(x) \text{ con } A \subseteq B &\rightarrow g(A) \leq g(B) \end{aligned} \quad [10.1]$$

Si tenga presente che le misure fuzzy di Credibilità e di Plausibilità sono definite su di un universo X finito; se così non è, viene presa in considerazione una porzione finita di X per ricondursi al caso sopra descritto dove valgono i tre assiomi 10.1.

La Credibilità e la Plausibilità si possono esprimere in termini della funzione $g(A)$ prima descritta, in formule si avrà:

$$Cr : P(x) \rightarrow [0, 1] ; \quad [11.1]$$

$$Pl : P(x) \rightarrow [0, 1] . \quad [12.1]$$

Ricordando che per una grandezza G di magnitudine M compresa in un intervallo di valori I , si ha che $G \in I$ è necessario se $M \subseteq I$; $G \in I$ è possibile se $M \cap I \neq \emptyset$; per le due misure in oggetto, si potrà completare la trattazione aggiungendo un quarto assioma (oltre quelli indicati come 10.1), che estenda il loro campo di applicazione ad un universo X formato da n insiemi A_i con $1 < i < n$, in formule, per la credibilità si avrà [2]:

$$\begin{aligned} Cr(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) &\geq \sum_i Cr(A_i) - \sum_{i>j} Cr(A_i \cap A_j) + \\ &+ (-1)^{n+1} Cr(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) \end{aligned} \quad [13.1]$$

Per la Plausibilità:

$$\begin{aligned} Pl(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) &\leq \sum_i Pl(A_i) - \sum_{i>j} Pl(A_i \cup A_j) + \\ &+ (-1)^{n+1} Pl(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \end{aligned} \quad [14.1]$$

Nel caso in cui si abbia $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ con $i \neq j$ (insiemi disgiunti) dalla 13.1 si avrà:

$$Cr(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n) \geq Cr(A_1) + Cr(A_2) + \dots + Cr(A_n) \quad [15.1]$$

$$\text{Considerando } X \equiv (A ; \bar{A}) \text{ con } n = 2, \text{ si ottiene } Cr(A) + Cr(\bar{A}) \leq 1 \quad [16.1]$$

$$\text{Tenendo presente le equazioni 7.1 ed 8.1 si ottiene } Pl(A) + Pl(\bar{A}) \geq 1 \quad [17.1]$$

Questo è un risultato ovvio se si pensa che un evento prima di divenire credibile deve risultare plausibile e che quindi la sua misura di plausibilità è sempre maggiore o al limite uguale a quella della sua credibilità, in definitiva si avrà:

$$Cr(A) \leq Pr(A) \leq Pl(A) \quad [18.1]$$

Quando l'incertezza associata all'evento è nulla e, di conseguenza, l'ignoranza sulle grandezze coinvolte è zero si ha:

$$Cr(A) = Pr(A) = Pl(A) \quad [19.1]$$

La Teoria della Probabilità, in definitiva, risulta essere un caso particolare della Teoria della Possibilità, in quanto definita per eventi non complessi, nell'accezione di complessità data in precedenza.

2.1 – I Nuclei di Probabilità.

Per determinare in maniera operativa la Credibilità e la Plausibilità, si usa definire il nucleo di probabilità. Questa grandezza rappresenta il valore probabilistico che si assegna all'evidenza dei parametri del problema complesso, in definitiva costituisce la conoscenza, anche minima, che si ha del problema. La funzione che esprime questa grandezza è definita [2]:

$$m : P(X) \rightarrow [0, 1] \quad [20.1]$$

con $P(X)$ Power set dell'universo X . Le condizioni al contorno che le funzioni che rappresentano i Nuclei di Probabilità devono soddisfare sono:

$$m(\emptyset) = 0 \quad [21.1]$$

$$\sum_{A \in P(X)} m(A) = 1 \quad [22.1]$$

E' importante sottolineare che il Nucleo di Probabilità $m(A)$ rappresenta l'evidenza associata all'insieme che rappresenta l'evento A ma non quella relativa ai sotto insiemi di A , detto questo si definisce:

$$Cr(A) = \sum_{B \subseteq A} m(B) \quad [23.1]$$

$$Pl(A) = \sum_{B \cap A \neq \emptyset} m(B) \quad [24.1]$$

$Cr(A)$ è l'evidenza totale di A e di tutti i sotto insiemi B contenuti in A ; $Pl(A)$ è l'evidenza totale di A , di tutti i sotto insiemi B contenuti in A e di tutti gli insiemi B che intersecano A . Dalle relazioni 23.1 e 24.1 risulta verificato che $Cr(A) \leq Pl(A)$.

I Nuclei di Probabilità sono dati del problema in analisi che vengono forniti da esperti nel campo. Da non confondersi con funzioni di Densità di Probabilità, costituiscono la conoscenza che si ha dei parametri del problema e delle interazioni fra essi. Nel caso in cui si consideri un gruppo di esperti n_e , è possibile associare le diverse informazioni fornite utilizzando la legge di associazione di Dempster considerando le possibili coppie, si utilizzerà la procedura un numero di volte pari al numero di combinazioni a due n_e di elementi; è da notare che la legge di combinazione delle evidenze di Dempster, ricalca la legge di associazione delle funzioni di Densità di Probabilità della teoria classica.

Considerando due esperti n_1 ed n_2 che si esprimono riguardo il problema A fornendo i Nuclei di Probabilità $[m_i(A)]$ che rispettano le equazioni 20.1, 21.1 e 22.1, la legge di Dempster avrà la seguente forma è:

$$m_{12}(A) = \frac{\sum_{B \cap C = A} m_1(B) \cdot m_2(C)}{1 - K} \quad [25.1]$$

$$\text{con } K = \sum_{B \cap C = \emptyset} m_1(B) \cdot m_2(C)$$

Gli insiemi B e C , denominati anche Elementi Focali, costituiscono la generica coppia di stati che, detto X l'universo di definizione di eventi possibili, appartengono a P_X .

3.1 – Misure di Necessità e di Possibilità.

Estendendo i concetti espressi tramite le equazioni 9.1 e 10.1, si consideri un insieme X di conoscenze imprecise ed incerte, come sotto insiemi di X si avrà l'insieme vuoto $\emptyset$ che rappresenta l'evento sempre impossibile ed il generico insieme $A \subset X$ che possiede un certo grado di evidenza basato sulle conoscenze, anche minime, che si hanno degli elementi che lo costituiscono. Denominando – $g(A)$ – la misura della confidenza di ciò che si può avere nell'accadimento di A considerando lo stato di conoscenza raggiunto, si avrà:

$$g(\emptyset) = 0 ; g(X) = 1 \quad [26.1]$$

($A = \text{impossibile} \rightarrow g(A) = 0$, $A = \text{evento certo} \rightarrow g(A) = 1$)

Per un universo di eventi X formato da infiniti elementi, si consideri una sequenza concatenata di P_X tale che, detti A_i sotto insiemi di P_X , si abbia $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_n$ (primo tipo) oppure $A_1 \supseteq A_2 \supseteq \dots \supseteq A_n$ (secondo tipo) con $1 < i < n$ allora si avrà:

$$1) \text{ se } A_1 \subseteq A_2 \Rightarrow g(A_1) \leq g(A_2)$$

$$2) \lim_{n \rightarrow +\infty} g(A_n) = g(\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n) \quad [27.1]$$

Si consideri d'ora in avanti un sequenza di primo tipo su X formato da infiniti elementi, si definisce un sistema di evidenza "consono" un insieme di Plausibilità $Pl(A_i)$ [o di Credibilità $Cr(A_i)$] non conflittuale a livello logico, in altri termini un insieme di Plausibilità non dissonanti fra loro. Ricordando che per una grandezza G di magnitudine M compresa in un intervallo di valori I , si ha che $G \in I$ è necessario se $M \subseteq I$; $G \in I$ è possibile se $M \cap I \neq \emptyset$, se A è un evento generico e S è l'evento sicuro appartenenti ad una sequenza di P_X allora si definisce Necessità di A la funzione $g(A) = v(A)$ tale che:

$$v(A) = 1 \text{ se } S \subseteq A; v(A) = 0 \text{ altrimenti.} \quad [28.1]$$

Si definisce Possibilità di A la funzione $g(A) = \pi(A)$ tale che:

$$\pi(A) = 1 \text{ } A \cap S; \pi(A) = 0 \text{ altrimenti.} \quad [29.1]$$

Considerando $A, B \in P_X$ si definisce su P_X :

$$\begin{aligned} g(A \cap B) &= v(A \cap B) \leq \min [g(A), g(B)] = \min [v(A), v(B)]; \\ g(A \cup B) &= \pi(A \cup B) \geq \max [g(A), g(B)] = \max [\pi(A), \pi(B)]. \end{aligned} \quad [30.1]$$

In definitiva:

$$v(A \cap B) \leq \min [v(A), v(B)]; \pi(A \cup B) \geq \max [\pi(A), \pi(B)]. \quad [31.1]$$

Si definisce su una sequenza di P_X :

$$\begin{aligned} g(A \cap B) &= Cr(A \cap B) = v(A \cap B) = \min [v(A), v(B)]; \\ g(A \cup B) &= Pl(A \cup B) = \pi(A \cup B) = \max [\pi(A), \pi(B)]. \end{aligned} \quad [32.1]$$

Prendendo a riferimento un universo formato da A e da $\bar{A}$ e considerando le equazioni 7.1, 8.1 e 32.1, si avrà:

$$\begin{aligned} g(A \cap \bar{A}) &= Cr(A \cap \bar{A}) = v(A \cap \bar{A}) = \min [v(A), v(\bar{A})] = 0; \\ g(A \cup \bar{A}) &= Pl(A \cup \bar{A}) = \pi(A \cup \bar{A}) = \max [\pi(A), \pi(\bar{A})] = 1 \end{aligned} \quad [33.1]$$

$$v(A) = 1 - \pi(\bar{A}); \pi(A) = 1 - v(\bar{A}) \quad [34.1]$$

Restano verificate le relazioni, analoghe alle equazioni 18.1 e 19.1 nei casi, rispettivamente, di incertezza associata all'evento diversa da zero e nulla:

$$v(A) \leq Pr(A) \leq \pi(A) \quad [35.1]$$

$$v(A) = Pr(A) = \pi(A) \quad [36.1]$$

Nel caso particolare di universo duale, le misure di Necessità e di Possibilità coincidono con quelle di Credibilità e di Plausibilità.

4.1 – La funzione di Distribuzione di Possibilità.

Dato il carattere duale delle Misure di Necessità e di Possibilità descritto dalle relazioni 34.1, d'ora in avanti ci si riferirà a quest'ultima. Si definisce una Funzione di Distribuzione di Possibilità $p(x)$ una applicazione lineare degli elementi x di X nell'intervallo unitario, in formule si avrà:

$$p: X \rightarrow [0, 1] \quad [37.1]$$

Considerando una sequenza concatenata di insiemi A_i su P_X formato da n elementi, la misura di possibilità del generico insieme $A \in P_X$ sarà è [2] [4]:

$$\pi(A) = \max_{x \in A} p(x) \quad [38.1]$$

La distribuzione sarà una sequenza ordinata di valori p_i con $1 \leq i \leq n$ con n detta lunghezza della distribuzione, si avrà

$$p(x) = [p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)] \quad [39.1]$$

Avendo visto che per una sequenza concatenata l'evidenza è coerente e, dato che la Plausibilità può essere calcolata tramite l'equazione 24.1, in termini di nuclei di Probabilità si avrà che $Pl(x_i) = \pi(x_i) = p(x_i)$. Una volta fissata la Distribuzione di Nuclei di Probabilità $m = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ con $\mu_i = (A_i)$ si può dimostrare che:

$$\pi(x_i) = \sum_{K=1}^n m(A_K) \quad [40.1]$$

Oppure, ponendo per convenzione $\mu_{n+1} = 0$, si può definire in maniera ricorsiva la Possibilità $\pi(x_i) = \mu_i - \mu_{i+1}$, si avrà:

$$\begin{aligned} \pi(x_1) &= \mu_1 + \mu_2 + \mu_3 \dots + \mu_n \quad [\text{che per l'equazione 22.1 è uguale ad uno}] \\ \pi(x_2) &= \mu_2 + \mu_3 \dots + \mu_n \\ \pi(x_3) &= \mu_3 \dots + \mu_n \\ &\dots \\ \pi(x_n) &= \mu_n \end{aligned}$$

Le procedure operative che permettono di giungere alla determinazione di una distribuzione di Possibilità sono sostanzialmente due. Una prevede di partire fissando l'evento sicuro x_1 che costituisce l'evento dell'insieme A_1 elemento iniziale della sequenza $A_1 \subseteq A_2 \subseteq \dots \subseteq A_i$, assegnandogli un valore di $\pi(x_1) = 1$, successivamente definire, tramite i nuclei di Probabilità μ_i , gli eventi $A_2 \dots A_n$ ad ignoranza crescente e infine calcolare la distribuzione $\pi(x_i)$.

Un altro modo di determinare di $\pi(x_i)$ è fissare i nuclei di probabilità a priori, successivamente individuare la sequenza concatenata di lunghezza massima che rappresenta il più grande insieme di evidenza per quel problema, infine calcolare la distribuzione $\pi(x_i)$.

Se si considera una grandezza a cui è associata una grande incertezza, si può dimostrare che è possibile, in ambito di Logica Fuzzy, utilizzare la sua Distribuzione di Possibilità come Funzione di Appartenenza. Con considerazioni analoghe a quelle fatte per definire ed eseguire il calcolo di $\pi(x_i)$, si può giungere alla determinazione della distribuzione di Necessità $v(x_i)$.

Ricordando l'equazione 35.1 e tenendo presente la definizione di distribuzione data dall'equazione 40.1, si può concludere che la Probabilità è limitata superiormente da una distribuzione di Possibilità ed inferiormente da una di Necessità. Quando l'ignoranza associata al problema è nulla, le due distribuzioni $\pi(x_i)$ e $v(x_i)$ convergono alla Probabilità, questo implica che mentre un basso grado di Possibilità implica anche una bassa probabilità (infatti, al limite, un evento impossibile è anche improbabile), un alto grado di possibilità non è né necessario né sufficiente a garantire un'alta probabilità. D'altro canto mentre un alto grado di necessità implica un alto grado di probabilità (infatti, al limite, un evento certo ha una probabilità di accadimento del 100 %), un basso grado di necessità non è né necessario né sufficiente a definire un basso grado di probabilità per l'evento oggetto di studio.

5.1 – Calcolo di Credibilità e Plausibilità mediante Albero degli eventi

Si consideri l'impianto di figura 2, scegliendo come evento iniziatore (E.I.) la rottura del termostato (3) si ha l'Albero degli Eventi di figura 3. Si voglia ora sottoporre ad una analisi possibilistica il problema affrontato con l'analisi tramite albero degli eventi. Considerando esista un certo grado di ignoranza sul funzionamento del Rilevatore di Fumi (inficiato da eventuali correnti d'aria) e dello Sprinkler (errata misurazione della temperatura, intervento tardivo) e supponendo, per ipotesi, che tutti i componenti considerati sono indipendenti, nonostante la medesima alimentazione serva sia il termostato (3) che l'interruttore (4), si avrà una configurazione degli eventi (rotture dei componenti) che, possibilmente, portano all'incendio, come illustrata in figura 3.

Considerando la Probabilità di fallimento (Rottura) del j-esimo componente $Pr(R_j)$ si impone che $Pr(R_3) = Pr(R_4) = Pr(R_5) = Pr(R_6) = 10^{-3}$, conseguentemente si avrà che $Pr(A) = 10^{-3}$ $Pr(B) = 10^{-6}$; $Pr(C) = 10^{-9}$; $Pr(D) = 10^{-12}$.

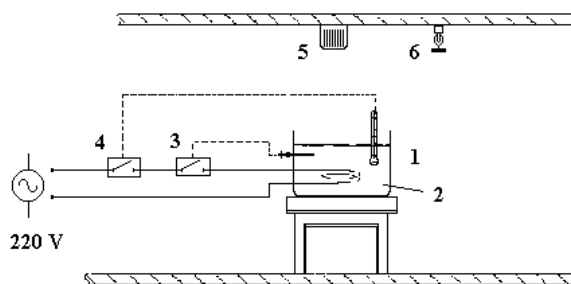


Fig. 2 – Schema dell'impianto:
(1) Friggitrice elettrica; (2) Olio;
(3) Termostato; (4) Interruttore
alta Temperatura; (5) Rilevatore
Fumo; (6) Sprinkler.

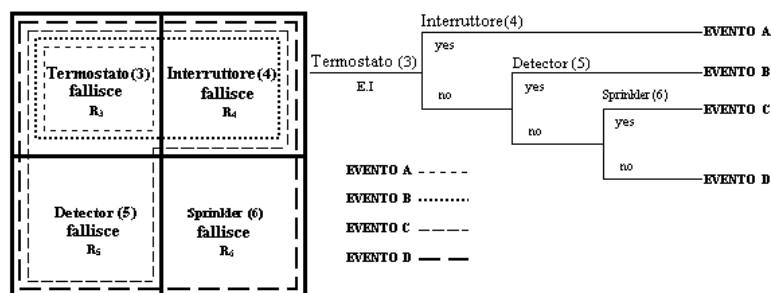


Fig. 3 – Configurazione ,
sequenze ed Albero degli
Eventi per l'impianto di
figura 2

Definiti gli eventi base (rotture dei componenti), dall'equazione 23.1 si fissano i valori dei Nuclei di Probabilità per ogni elemento focale del Power Set di riferimento in maniera tale da assegnare un valore probabilistico di appartenenza dell'evento incendio a ciascuno degli insiemi che lo costituiscono. Il valore del Nucleo dell'insieme che definisce un evento privo di fattori di ignoranza, coincide con i valori di Credibilità, Probabilità e Plausibilità dell'evento stesso (vedi equazione 19.1), sostanzialmente per l'evento “Rottura del Termostato (3)” (evento A) il valore $Pr(R_3) = 10^{-3}$, coincide con i suoi valori di $Pl(R_3)$ e $Cr(R_3)$. Procedendo con l'assegnazione dei nuclei di Probabilità si è ripartita l'ignoranza equamente tra l'evento R_5 ed R_6 e loro combinazioni con gli altri elementi focali, inoltre rispettando l'equazione 22.1 ed utilizzando l'equazione 23.1 per il calcolo della Credibilità, si hanno i valori come in tabella 1.2. La Credibilità di un incendio nel caso reale di ignoranza non nulla è uguale secondo l'equazione 32.1 a 10^{-3} .

Tabella 1.2 – Valori dei Nuclei di Probabilità e di Credibilità degli elementi focali dei quattro eventi di figura 3 messi a confronto rispetto ai Casi 1 e 2.

Elementi del Power Set	N.d.P. Caso 1	N.d.P. Caso 2	Credibilità Caso 1	Credibilità Caso 2
R_3	0.001	0.001	$Cr(R_3) = 0.001$	$Cr(R_3) = 0.001$
R_4	0.001	0.001	$Cr(R_4) = 0.001$	$Cr(R_4) = 0.001$
R_5	0.023	0.001	$Cr(R_5) = 0.023$	$Cr(R_5) = 0.001$
R_6	0.023	0.001	$Cr(R_6) = 0.023$	$Cr(R_6) = 0.001$
$R_3 \cup R_4$	0.002	0.002	$Cr(R_3 \cup R_4) = 0.004$	$Cr(R_3 \cup R_4) = 0.004$
$R_3 \cup R_5$	0.024	0.002	$Cr(R_3 \cup R_5) = 0.048$	$Cr(R_3 \cup R_5) = 0.004$
$R_3 \cup R_6$	0.024	0.002	$Cr(R_3 \cup R_6) = 0.048$	$Cr(R_3 \cup R_6) = 0.004$
$R_4 \cup R_5$	0.024	0.002	$Cr(R_4 \cup R_5) = 0.048$	$Cr(R_4 \cup R_5) = 0.004$
$R_4 \cup R_6$	0.024	0.002	$Cr(R_4 \cup R_6) = 0.048$	$Cr(R_4 \cup R_6) = 0.004$
$R_5 \cup R_6$	0.054	0.002	$Cr(R_5 \cup R_6) = 0.1$	$Cr(R_5 \cup R_6) = 0.004$
$R_3 \cup R_4 \cup R_5$	0.05	0.003	$Cr(R_3 \cup R_4 \cup R_5) = 0.125$	$Cr(R_3 \cup R_4 \cup R_5) = 0.12$
$R_3 \cup R_4 \cup R_6$	0.05	0.003	$Cr(R_3 \cup R_4 \cup R_6) = 0.125$	$Cr(R_3 \cup R_4 \cup R_6) = 0.12$
$R_3 \cup R_5 \cup R_6$	0.1	0.003	$Cr(R_3 \cup R_5 \cup R_6) = 0.249$	$Cr(R_3 \cup R_5 \cup R_6) = 0.12$
$R_4 \cup R_5 \cup R_6$	0.1	0.003	$Cr(R_4 \cup R_5 \cup R_6) = 0.249$	$Cr(R_4 \cup R_5 \cup R_6) = 0.12$
$R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_6$	0.5	0.972	$Cr(R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_6) = 1$	$Cr(R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_6) = 1$

Si confrontino i dati sulle rotture dei componenti affette da un certo grado di incertezza (Caso 1), con gli stessi dati con un grado di incertezza minore (Caso 2, vedi tabella 1.2); si nota che il limite imposto nel Caso 2 corrisponde al grado di incertezza massimo, ed in quest'ipotesi limite, si è supposto che l'ignoranza sia diffusa sul funzionamento di tutti i componenti del sistema e sia molto piccola [N.d.P. ($R_3 \cup \dots \cup R_6$) = Nucleo di Probabilità dell'evento Incendio associato all'evento ($R_3 \cup \dots \cup R_6$) = 0.948].

I valori dei Nuclei di Probabilità e di Plausibilità degli elementi focali dei quattro eventi di figura 4 per Casi 1 e 2 possiedono valori molto alti, superiori a 0.75.

Tabella 1.3 – Valori dei Nuclei di Probabilità, di Plausibilità e di Credibilità degli elementi focali dei quattro eventi di figura 3 rispetto al Caso 3 in cui si considera come elemento critico il Termostato (3).

Elementi del Power Set	N.d.P. (Caso 3)	Credibilità (Caso 3)	Plausibilità (Caso 3)
R_3	0.6	$Cr(R_3) = 0.6$	$Pl(R_3) = 0.941$
R_4	0.001	$Cr(R_4) = 0.001$	$Pl(R_4) = 0.306$
R_5	0.001	$Cr(R_5) = 0.001$	$Pl(R_5) = 0.266$
R_6	0.001	$Cr(R_6) = 0.001$	$Pl(R_6) = 0.266$
$R_3 \cup R_4$	0.06	$Cr(R_3 \cup R_4) = 0.661$	$Pl(R_3 \cup R_4) = 0.996$
$R_3 \cup R_5$	0.02	$Cr(R_3 \cup R_5) = 0.621$	$Pl(R_3 \cup R_5) = 0.996$
$R_3 \cup R_6$	0.02	$Cr(R_3 \cup R_6) = 0.621$	$Pl(R_3 \cup R_6) = 0.996$
$R_4 \cup R_5$	0.002	$Cr(R_4 \cup R_5) = 0.004$	$Pl(R_4 \cup R_5) = 0.379$
$R_4 \cup R_6$	0.002	$Cr(R_4 \cup R_6) = 0.004$	$Pl(R_4 \cup R_6) = 0.379$
$R_5 \cup R_6$	0.002	$Cr(R_5 \cup R_6) = 0.004$	$Pl(R_5 \cup R_6) = 0.337$
$R_3 \cup R_4 \cup R_5$	0.05	$Cr(R_3 \cup R_4 \cup R_5) = 0.714$	$Pl(R_3 \cup R_4 \cup R_5) = 0.975$
$R_3 \cup R_4 \cup R_6$	0.05	$Cr(R_3 \cup R_4 \cup R_6) = 0.714$	$Pl(R_3 \cup R_4 \cup R_6) = 0.975$
$R_3 \cup R_5 \cup R_6$	0.05	$Cr(R_3 \cup R_5 \cup R_6) = 0.694$	$Pl(R_3 \cup R_5 \cup R_6) = 0.935$
$R_4 \cup R_5 \cup R_6$	0.05	$Cr(R_4 \cup R_5 \cup R_6) = 0.059$	$Pl(R_4 \cup R_5 \cup R_6) = 0.3$
$R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_6$	0.091	$Cr(R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_6) = 1$	$Pl(R_3 \cup R_4 \cup R_5 \cup R_6) = 1$

Rispetto alla Plausibilità, calcolata secondo quanto prescrive l'equazione 24.1, si consideri la situazione descritta in tabella 1.2. Si nota come nel Caso 1 si riesca ad individuare, ad esempio, un caso critico come quello descritto dall'evento $R_5 \cup R_6$, mentre considerando il Caso 2 di ignoranza non ben individuabile in un componente (o ristretto gruppo di componenti) il calcolo della Credibilità pone un limite inferiore non ulteriormente migliorabile se non con lo sviluppo tecnologico dei componenti o con l'aggiunta di ridondanze, mentre il calcolo della Plausibilità al contrario non dà risultati significativi.

Nella tabella 1.3 sono illustrati i risultati di un'analisi Possibilistica considerando, associata al funzionamento del Termostato (3), un grossa ignoranza (Caso 3).

5.2 – Calcolo delle Distribuzioni di Possibilità mediante Albero degli eventi.

Avendo a disposizione le Distribuzioni di Nuclei di Probabilità $m = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n)$ per i tre Casi analizzati nel paragrafo precedente, si possono ricavare le Distribuzioni di Possibilità $\pi(x_i)$ secondo quanto prescrive l'equazione 40.1 [oppure in maniera ricorsiva $\pi(x_i) = \mu_i - \mu_{i+1}$ con $\mu_{n+1} = 0$]. Riferendosi all'Albero degli Eventi di fig. 3 la sequenza coerente di eventi da considerare è Evento A $\subseteq$ Evento B $\subseteq$ Evento C $\subseteq$ Evento D.

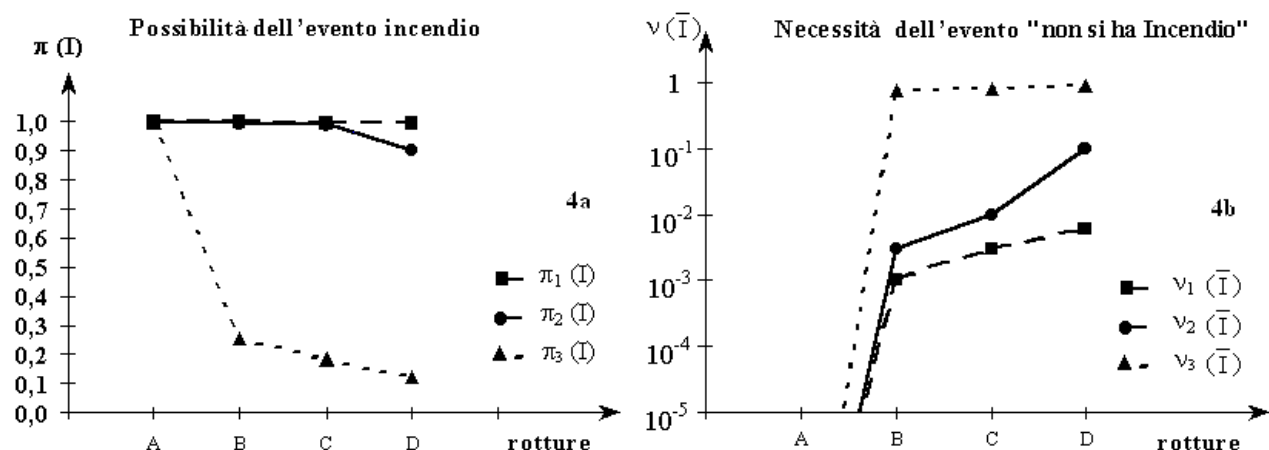
Le Distribuzioni di Nuclei di Probabilità $[m_i]$ sono state normalizzate $[m_i^{(n)}]$ rispetto alla somma $[S\mu_j]$ dei μ_j , nel rispetto della 22.1:

$$m_1 = (0.001, 0.002, 0.05, 0.5), S\mu_j = 0.053 \rightarrow m_1^{(n)} = (0.003, 0.007, 0.09, 0.9)$$

$$m_2 = (0.001, 0.002, 0.003, 0.972) \rightarrow S\mu_j = 0.978 \rightarrow m_2^{(n)} = (0.001, 0.002, 0.003, 0.996)$$

$$m_3 = (0.6, 0.06, 0.05, 0.091) \rightarrow S\mu_j = 0.801 \rightarrow m_3^{(n)} = (0.744, 0.075, 0.061, 0.12)$$

Le corrispondenti Distribuzioni di Possibilità dell'evento incendio (I) sono, per i casi considerati, quelli illustrati in figura 4a.



Possibilità e Necessità dell'Evento Incendio nel Caso 3

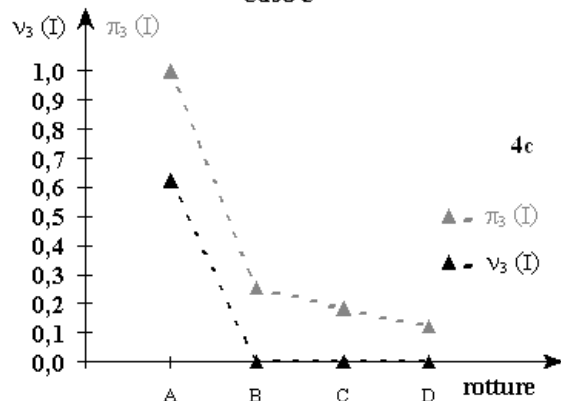


Fig. 4a – Distribuzioni di Possibilità e di Necessità dell'evento incendio nei tre casi considerati.

Fig. 4b – Distribuzioni di Possibilità e di Necessità dell'evento non incendio nei tre casi considerati.

Fig. 4c – Distribuzioni di Possibilità e di Necessità dell'evento incendio per il caso 3.

Considerando che la funzione di Distribuzione di Possibilità costituisce il limite superiore della Probabilità di accadimento dell'evento considerato, dall'analisi di figura 4a si evince che per il Caso 1 ed il Caso 2 (rispettivamente di ignoranza su due componenti ed ignoranza diffusa), la Possibilità di un incendio rappresenta un limite superiore troppo elevato per essere significativo inoltre, se si considera che la distribuzione in oggetto può essere usata come Funzione di Appartenenza dell'accadimento di un incendio, avendo questo tipo di valori non si ha la facoltà di discriminazione e focalizzazione dei termini più rappresentativi.

Il Caso 3 (vedi figura 4a) dà più informazione evidenziando un alto grado di rischio (possibilistico anziché probabilistico) quando si abbia una grande ignoranza sul corretto funzionamento di un componente la cui rottura coincide con l'evento iniziatore considerato nello studio effettuato con l'Albero degli Eventi.

Se la funzione di Distribuzione di Possibilità $\pi_i(I)$ costituisce il limite superiore della Probabilità dell'evento incendio nel Caso 3, la funzione di Distribuzione di Necessità $v_i(\bar{I})$ costituisce il limite inferiore della Probabilità di accadimento dell'evento "non si ha incendio" nel Caso 3 ed è ricavabile secondo le equazioni 34.1, come illustrato in figura 4c.

Considerando la figura 4b, essendo la $v_i(\bar{I})$ il limite inferiore della Probabilità di accadimento di $\bar{I}$, per i Casi 2 e 3 si ottiene l'informazione che la Probabilità che non si verifichi un incendio non può essere inferiore, rispettivamente, a 10^{-1} ed a $5 \cdot 10^{-2}$.

Per il Caso 3 la probabilità di $\bar{I}$ è limitata inferiormente da una distribuzione che indica come evento critico soltanto il primo (Rottura del Termostato = Evento A).

Di notevole interesse sarebbe il calcolo, per i tre Casi considerati, della $v_i(I)$, in maniera tale da giungere ad un limite inferiore alla Probabilità di avere l'incendio.

Si considerino gli istogrammi di figura 5a dei Nuclei di Probabilità utilizzati, secondo la 40.1, per il calcolo di Possibilità. Il calcolo di Necessità del generico Evento E_i appartenente all'Universo X può essere ottenuto attraverso i nuclei di Probabilità nel seguente modo [3] :

$\forall E_i \in X \rightarrow v(E_i) \equiv \text{Max} [m(E_i) - m(\bar{E}_i)]$; dove $m(\bar{E}_i) \equiv \text{Max} [m(E_j)] \mid E_j \in X, E_j \neq E_i$

Considerando un Evento composto A si avrà (vedi figure 5a e 5b):

$\forall A \subseteq X \rightarrow v(A) \equiv \sum_{E_i \in A} \text{Max} [m(E_i) - m(\bar{A})]$ dove $m(\bar{A}) \equiv \text{Max} [m(E_i)] \mid E_i \notin A$

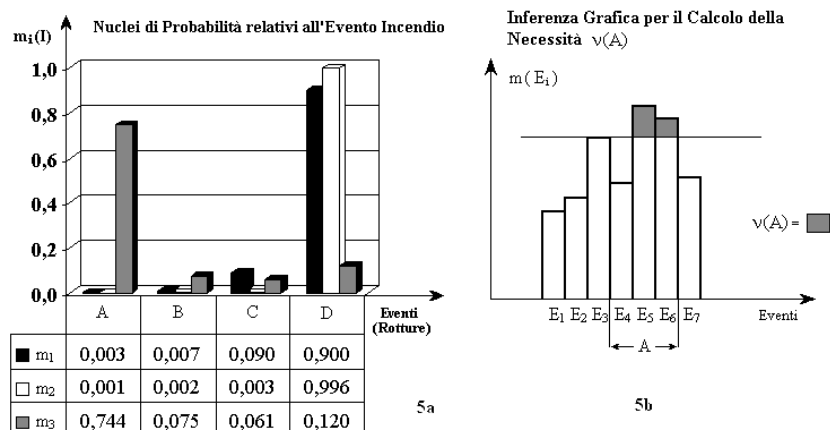


Fig. 5a – Valori dei Nuclei di Probabilità $m(I)$ relativi all'Evento Incendio, nei tre casi considerati

Fig. 5b – inferenza grafica utilizzata per il calcolo della sua Distribuzione di Necessità

Per i tre Casi precedentemente considerati si otterrà che nei primi due casi considerati le due Distribuzioni di Necessità saranno tali che $v_1(I) = v_2(I) = 0$, nel Caso 3 la Distribuzione corrisponde a quella illustrata in Figura 4c dalla quale si evince l'importanza che possiede, al fine di un corretto funzionamento dell'impianto, il Termostato al quale, per ipotesi, è stata associata una grossa ignoranza riguardo la sua corretta prestazione (Caso3), mentre nei Casi 1 e 2, l'analisi mediante le distribuzioni di Necessità e Possibilità, non dà risultati rilevanti.

Conclusioni.

Si osserva come l'applicazione della Teoria dell'Evidenza, utilizzata congiuntamente a quella classica della Probabilità, sia un utile strumento di analisi per l'individuazione dei componenti critici di un sistema e dell'andamento della Probabilità di accadimento del Top Event in funzione delle sequenze incidentali che abbiano come primo evento quello cui è associata la massima ignoranza. Un possibile sviluppo del metodo, consiste nell'applicazione della composizione dei pareri mediante la legge di Dempster. Si presuppone che tale approccio sia più incisivo in termini di significatività dei risultati. Si intravede come evoluzione del modello l'utilizzo di frequenze di accadimento in luogo dei Nuclei di Probabilità [3] composti, mediante la legge di Dempster con i pareri forniti da esperti nel campo.

Bibliografia

- [1] A mathematical theory of evidence / Glenn Shafer – Princeton University Press – 1976
- [2] Possibility Theory, an Approach to Computerized Processing of Uncertainty / Didier Dubois and Henri Prade – Plenum Press, New York – 1988
- [3] Unfair Coins and Necessity Measures: Towards a Possibilistic Interpretation of Istograms / Didier Dubois and Henri Prade – England Publishing Company, Fuzzy Sets Systems 10 (April 1983)
- [4] Fuzzy logic with engineering applications / T.J. Ross – McGraw-Hill, New York, 1995.
- [5] Fuzzy sets as a basis for a theory of possibility / Zadeh L.A., F.S.S., 1978
- [6] A Class of Fuzzy Measures Based on Triangular Norms. A General Framework for the Combination of Uncertain Information / Didier Dubois and Henri Prade – Int. J. Gen. Systems (1982).