

AUTOMI CELLULARI PER LA VALUTAZIONE DELL’AFFIDABILITA’ DI SISTEMI A RETE

Enrico Zio, Andrea Zoia
Dipartimento di Ingegneria Nucleare –
Politecnico di Milano
Via Ponzio 34/3, 20133 Milano, Italia

enrico.zio@polimi.it

Claudio M. Rocco S.
Facultad de Ingeniería, Universidad Central Venezuela,
Apartado 47937, Caracas, 1041A, Venezuela

crocco@reacciun.ve

Sommario

In questo lavoro vengono descritti i principi fondamentali di funzionamento degli Automi Cellulari e viene esplorata la possibilità del loro utilizzo ai fini della verifica di connessione e della determinazione dell’affidabilità di una rete magliata.

1. Introduzione

L’analisi di affidabilità di sistemi composti da elementi connessi tra loro in strutture a rete sta ricevendo sempre maggior attenzione quale strumento di verifica di progetto e di valutazione delle prestazioni di molti sistemi reali come, ad esempio, i sistemi computazionali distribuiti ed i sistemi di comunicazione [Aggarwal, 1975], [Kubat, 1989], [Samad, 1987], i sistemi di trasmissione e distribuzione di potenza [Jane et al., 1993], [Yeh et al., 1998], i sistemi di trasporto [Aven, 1987], i sistemi di produzione e distribuzione di olio e gas [Aven, 1987], [Aven, 1988].

La verifica, mediante metodi classici, dell’esistenza della connessione tra i nodi di input (di seguito anche chiamati nodi sorgente o alimentazione) ed i nodi di output (di seguito anche chiamati nodi terminali o utenza) di una rete interconnessa richiede la conoscenza dei percorsi di taglio o di successo (cut o path sets) o una procedura ‘depth-first’ [Billinton and Allan, 1992], [Reingold et al., 1977], [Fishman, 1986]. Questo tipo di approcci porta a problemi di tipo NP-hard che richiedono metodi di soluzione computazionalmente assai onerosi.

Inoltre, in molti casi reali si verifica la necessità di introdurre modifiche al sistema rete per una sua espansione e rinforzo. Modifiche della configurazione si verificano anche a causa di guasti accidentali. In tali casi, gli algoritmi classici eseguono il calcolo della connessione della rete modificata dall’inizio.

Lo scopo del presente lavoro è quello di mostrare che alcuni problemi legati alla affidabilità di reti possono essere affrontati mediante Automi Cellulari, apportando un notevole miglioramento rispetto alle sopradette limitazioni.

Gli Automi Cellulari costituiscono una classe generale di modelli matematici in grado di riprodurre, sulla base di regole semplici, il comportamento dinamico di sistemi complessi [von Neumann, 1951], [Toffoli, 1977], [Wolfram, 1986]. La sorprendente semplicità di funzionamento ha reso questi modelli estremamente attraenti per lo studio di dinamiche complicate, quali quelle caratteristiche dei fluidi, delle reti neurali, dei mercati finanziari e altri. La dinamica degli Automi Cellulari si sviluppa a tempo discreto su una matrice spaziale di celle anch’essa discreta ed omogenea, cioè tale che tutte le celle posseggano le medesime proprietà. La generica cella della matrice è individuata da opportuni indici di posizione ed è caratterizzata da una variabile di stato che ne definisce le caratteristiche al tempo t . Ad ogni cella è assegnata a priori una regione di “vicinato”, costituita da un certo numero di celle contigue che influenzano l’evoluzione della cella stessa. Durante l’evoluzione dinamica, ad ogni passo temporale ciascuna cella aggiorna il suo stato secondo una predefinita regola di transizione, che dipende esclusivamente dallo stato delle celle che appartengono al suo vicinato. La regola di transizione è la medesima per ogni cella della matrice. L’aggiornamento delle variabili di stato avviene in modo sincrono per tutte le celle e la dinamica globale dell’Automa Cellulare emerge dalla regola che è stata definita a livello locale per ogni cella [Wolfram, 1985a-c].

In questo lavoro vengono esaminate le potenzialità modellistiche offerte dagli Automi Cellulari ai fini del calcolo dell’affidabilità di un sistema a rete. Nel paragrafo 2 verranno discussi i principi di funzionamento degli Automi Cellulari, specificamente nei casi monodimensionale e bidimensionale. Nel paragrafo 3.1 verrà innanzitutto affrontato il problema di determinare l’esistenza di una connessione tra un nodo S di sorgente ed un nodo T di utenza in una rete magliata. Tale problema può essere affrontato mediante un Automa Cellulare, associando a ciascun nodo della rete una cella di una matrice discreta, il cui vicinato è costituito dalle celle ad essa connesse. La variabile di stato di ogni cella può assumere i valori discreti 0 o 1, a seconda che il corrispondente nodo della rete sia inattivo o attivo. La regola locale di transizione della generica cella della matrice è costituita da una funzione logica di tipo OR: se almeno una delle celle

del vicinato è attiva, allora anche la cella considerata passa allo stato attivo, o vi permane se già attiva al passo temporale precedente. Per verificare l'esistenza di un percorso di connessione tra il nodo sorgente S ed il nodo utenza T, l'Automa Cellulare propaga localmente l'informazione da un nodo all'altro, aggiornando lo stato di ogni cella in base al valore assunto da quelle del suo vicinato. Il processo ha termine quando il nodo T viene attivato oppure quando il calcolo giunge ad un punto di stagnazione: nel primo caso è verificata l'esistenza della connessione richiesta, nel secondo, invece, la rete non possiede alcun percorso che connetta S a T.

Un vantaggio di questo approccio di simulazione risiede nel fatto che eventuali modifiche di topologia della rete (ad esempio l'eliminazione di archi o nodi), non richiedono la valutazione dell'esistenza di un percorso S – T *ab initio*, poiché è sufficiente riprendere il calcolo dalla configurazione raggiunta, dopo aver effettuato i suddetti cambiamenti di topologia.

Successivamente nei paragrafi 3.2 e 3.3 viene mostrato che la combinazione dell'approccio per la verifica della connessione S – T con un metodo di campionamento Monte Carlo consente il calcolo dell'affidabilità di una rete i cui archi di connessione possano guastarsi con probabilità $f=1-r$, essendo r l'affidabilità del generico arco. Generando numerose realizzazioni casuali di connessione della rete e verificando, per ognuna di esse, l'esistenza di un percorso S – T mediante l'algoritmo degli Automi Cellulari, è possibile valutare l'affidabilità della rete come il rapporto tra il numero di realizzazioni per le quali si è verificata l'esistenza di una connessione S – T ed il numero totale di realizzazioni campionate.

Un semplice caso studio di letteratura dimostrerà la fattibilità dell'approccio proposto.

2. Principi di funzionamento degli Automi Cellulari

Gli Automi Cellulari appartengono alla classe dei sistemi dinamici a tempo e spazio discreto, sono caratterizzati da interazioni su scala locale tra gli elementi costituenti e sfruttano un tipo di evoluzione intrinsecamente parallela. La dinamica degli Automi Cellulari si sviluppa in uno spazio di stato costituito da una matrice discreta $\mathcal{L}$ di celle. Tale matrice è tipicamente omogenea, in modo che ogni sua cella sia caratterizzata dalle medesime proprietà. La singola cella è definita da una variabile di stato che generalmente può assumere solo un numero finito di valori discreti dello spazio locale k -dimensionale $S=\{0,1,2,\dots,k-1\}$: ad esempio, in uno spazio tridimensionale lo stato della cella di posizione ijk al tempo t è descritta dalla variabile di stato $s_{ijk}(t)$. Alla generica cella ijk è associato a priori un insieme di celle N_{ijk} (denominato "intorno" o "vicinato") che ne influenzano l'evoluzione. In altre parole, ogni cella della matrice interagisce esclusivamente con le celle che appartengono al suo vicinato. Tale interazione avviene mediante una data funzione di transizione $\phi: S^n \rightarrow S$, identica per tutte le celle ed invariante nel tempo, che aggiorna il valore della variabile di stato per il passo temporale successivo $s_{ijk}(t+1)$ in base ai valori assunti al passo corrente dalla cella stessa e da tutti i suoi vicini: $s_{ijk}(t+1) = \phi[s_{rsp}(t), \text{ } rsp \in N_{ijk}]$.

Un passo temporale di aggiornamento è completato quando la funzione di transizione sia stata applicata simultaneamente a tutte le celle della matrice e si sia dunque definito il nuovo stato complessivo del sistema. La dinamica globale dell'Automa Cellulare emerge quindi dall'interazione delle dinamiche locali delle singole celle. Poiché la simulazione della dinamica di un Automa Cellulare viene eseguita su uno spazio di dimensioni finite, occorre assegnare le opportune condizioni al contorno per le celle di bordo. Un esempio tipico consiste nell'assegnare condizioni al contorno di tipo periodico: nel caso monodimensionale questo comporta che l'ultima cella replichi la prima; se la matrice è bidimensionale, visivamente si arrotonda su se stessa in forma di toro; nel caso tridimensionale, la matrice si dispone a formare un toro generalizzato; e così via.

2.1 Automi Cellulari unidimensionali

Si consideri la generica cella i di un automa monodimensionale quale quello illustrato in Figura 1.

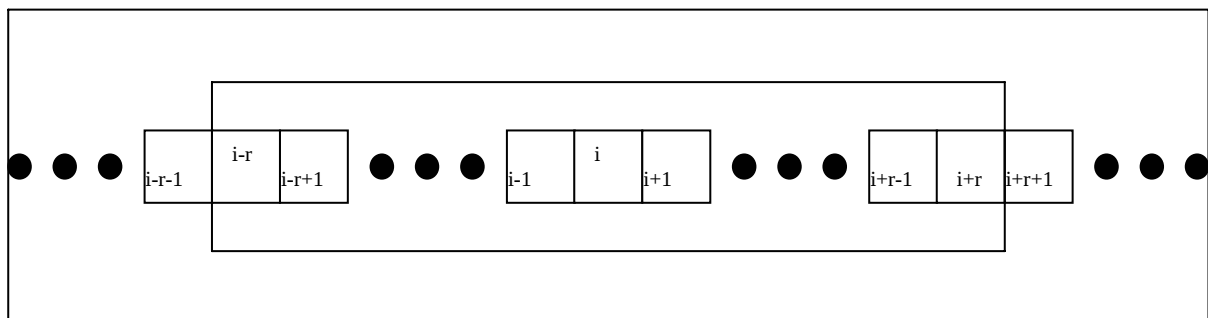


Figura 1. Automa Cellulare monodimensionale

La dimensione dell'intorno N_i è definita dal "raggio" r , cosicché l'intorno risulta essere $N_i = \{i-r, i-r+1, \dots, i-1, i, i+1, \dots, i+r-1, i+r\}$. La dinamica del sistema è governata dalla regola di transizione $\phi: S^{2r+1} \rightarrow S$, tale per cui $s_i(t+1) = \phi[s_{i-r}(t), \dots, s_i(t), \dots, s_{i+r}(t)]$. Poiché le celle possono assumere uno qualunque dei valori in $S = \{0, 1, 2, \dots, k-1\}$, per definire completamente la funzione ϕ occorre assegnare un valore in S a $s_i(t+1)$ per ciascuna delle k^{2r+1} possibili $(2r+1)$ -tuple configurazioni che possono verificarsi per l'intorno di raggio r della generica cella i . Poiché in corrispondenza di ciascuna delle k^{2r+1} possibili configurazioni si può assegnare a $s_i(t+1)$ uno qualunque dei k valori di S , esistono $k^{k^{2r+1}}$ possibili regole.

L'evoluzione temporale di un Automa Cellulare di questo tipo richiede l'esecuzione delle seguenti operazioni:

- Specificazione della dimensione M della stringa
- Specificazione delle condizioni al contorno
- Specificazione delle condizioni iniziali $\vec{s}(0) = [s_1(0), s_2(0), \dots, s_M(0)]$
- Applicazione sincrona ed iterativa della regola di selezione ϕ a ciascuna delle M celle della stringa.

Come semplice esempio, consideriamo $k=2$, cioè $S = \{0, 1\}$, e $r=1$. Occorre definire la regola specificando i valori che assume la generica cella i in corrispondenza di tutte le possibili triplette di valori assunti dalle celle dell'intorno $N_i = \{i-1, i, i+1\}$. Un esempio possibile è quello della *somma modulo 2*, indicata con il simbolo $\oplus_2$ e definita come segue:

$$s_i(t+1) = \text{mod}_2 [s_{i-1}(t) + s_i(t) + s_{i+1}(t)] \equiv \oplus_2 \{s_{i-1}(t), s_i(t), s_{i+1}(t)\}$$

Secondo questa regola, il valore della i -esima cella è posto a 1 se il numero di celle del suo intorno con valore 0 è pari e a 0 se tale numero è dispari:

$i-1(t), i(t), i+1(t)$	1,1,1	1,1,0	1,0,1	1,0,0	0,1,1	0,1,0	0,0,1	0,0,0
$i(t+1)$	1	0	0	1	0	1	1	0

La Figura 2 mostra l'evoluzione di un Automa Cellulare con $M=16$ celle, condizioni al contorno periodiche (cioè $s_{17} = s_1$) e condizioni iniziali $\vec{s}(0) = [1011000101001100]$. L'Automa Cellulare riproduce le condizioni iniziali dopo 8 aggiornamenti: questo ciclo di periodo 8 risulta dalla sua periodicità spaziale di passo 4 [Bar-Yam, 1997].

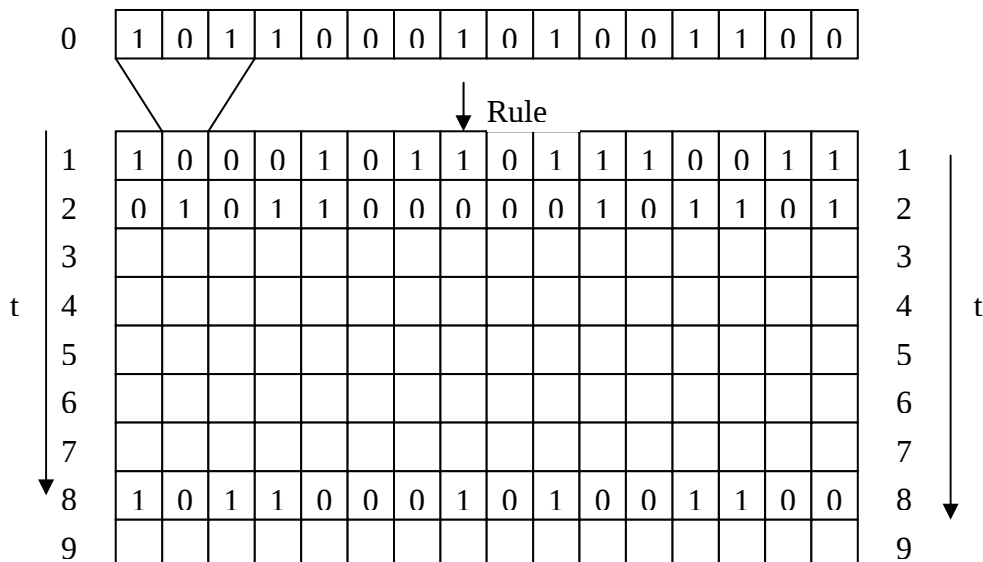


Figura 2. Dinamica di un Automa Cellulare monodimensionale basato su regola di selezione "somma modulo 2"

2.2 Automi Cellulari bidimensionali

Gli Automi Cellulari bidimensionali offrono un valido strumento per descrivere l'evoluzione dei sistemi fisici reali. Per tale classe di algoritmi è possibile definire varie strutture di intorno di ogni cella, quali quelle riportate in Figura 3.

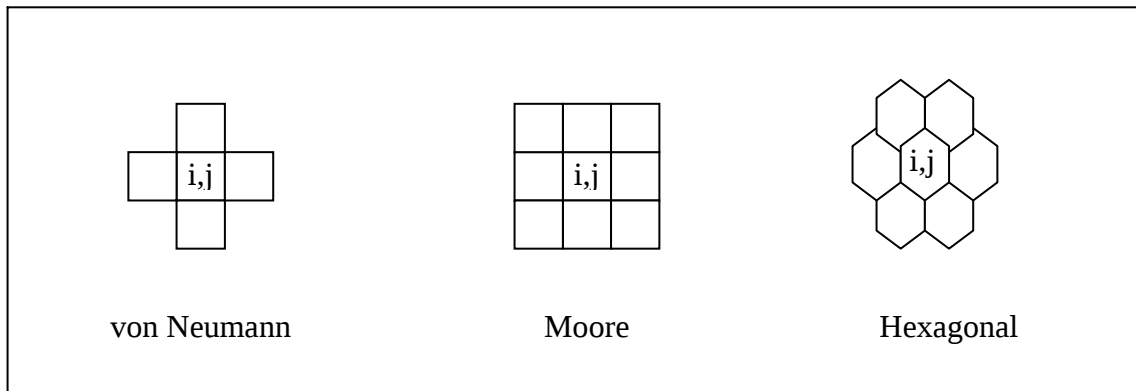


Figura 3. Esempi di intorno di cella in Automi bidimensionali

L'intorno di *Von Neumann* si compone delle 4 celle verticalmente e orizzontalmente adiacenti alla cella considerata; l'intorno di *Moore* si compone invece di tutte e 8 le celle prime vicine di quella centrale. Entrambi questi intorni hanno raggio unitario. Una regola di selezione assegnata sull'intorno di Von Neumann prende la forma:

$$s_{ij}(t+1) = \phi[s_{ij}(t), s_{i-1j}(t), s_{i+1j}(t), s_{ij-1}(t), s_{ij+1}(t)]$$

mentre una definita sull'intorno di Moore si scrive:

$$s_{ij}(t+1) = \phi[s_{i-1j-1}(t), s_{ij-1}(t), s_{i+1j-1}(t), s_{i-1j}(t), s_{ij}(t), s_{i+1j}(t), s_{i-1j+1}(t), s_{ij+1}(t), s_{i+1j+1}(t)]$$

3. Applicazione degli Automi Cellulari alla valutazione dell'affidabilità di sistemi a rete

3.1 Verifica della connessione S- T

Consideriamo una rete composta di m nodi binari, la cui funzione sia quella di trasferire un dato segnale o flusso di materia da un nodo S di alimentazione ad un nodo utenza T . La determinazione dell'esistenza di una connessione S- T mediante metodi classici richiederebbe la conoscenza dei cut – set o dei path – set od una procedura depth – first [Billinton and Allan, 1992], [Reingold et al., 1977], [Fishman, 1986]. Per applicazioni reali, tali tipi di approccio possono risultare estremamente pesanti e richiedere lunghi tempi di calcolo [Smith, 1982], [Evans and Minieka, 1992].

Una procedura alternativa riguarda la costruzione di un Automa Cellulare monodimensionale per descrivere le caratteristiche di connessione del sistema. A tal fine, associamo ad ogni nodo i della rete una cella spaziale, il cui intorno N_i è costituito dall'insieme di celle (cioè dagli elementi della rete) ad essa collegate in ingresso. La variabile di stato s_i della cella i -esima è binaria ed assume il valore 1 quando il nodo corrispondente è operativo (attivo) e 0 se non operativo (passivo). Da un punto di vista algoritmico, le caratteristiche di connessione della rete possono essere rappresentate da una matrice $m \times m$, nella quale l'elemento i,i sulla diagonale principale rappresenta lo stato del nodo i e l'elemento i,j posto fuori dalla diagonale principale rappresenta l'arco di connessione dal nodo j al nodo i . Ogni elemento della matrice di configurazione della rete può assumere i seguenti valori: 1, per rappresentare lo stato attivo (connesso) di una cella (nodo), oppure 0, per rappresentare lo stato passivo (non connesso). Ad esempio, per esprimere il fatto che non esiste una connessione attiva dal nodo 1 verso il nodo 4, l'elemento 4,1 della matrice sarà posto a 0. In questo modo, si assume implicitamente che gli archi possiedano una specifica direzione e che il segnale si trasmetta da un nodo all'altro in accordo con quest'ultima.

La regola di transizione che governa la dinamica della generica cella i -esima consiste nell'applicazione dell'operatore logico OR ($\vee$) agli stati dei nodi del suo intorno:

$$s_i(t+1) = s_p(t) \vee s_q(t) \vee \dots \vee s_r(t), \quad p, q, \dots, r \in N_i$$

dove t è il passo dell'iterazione.

Seguendo tale regola, una cella viene attivata se ne esiste almeno un'altra attiva nel suo intorno, ovvero se essa riceve un ingresso da almeno uno dei nodi ad essa connessi. All'inizio dell'evoluzione, il nodo S di ingresso è la sola cella attiva. L'applicazione successiva della regola di transizione ad ogni nodo della rete genera i percorsi di trasmissione attraverso la rete stessa. Il calcolo termina quando il nodo utenza è stato attivato oppure quando il processo è entrato in stagnazione. Dal momento che il più lungo percorso possibile da S a T attiva tutti i rimanenti $m-1$ nodi, l'esistenza di

una connessione S - T può essere determinata in $O(m)$ iterazioni. L'algoritmo di base per la verifica della connessione procede attraverso i seguenti passi:

1. $t = 0$
2. Porre tutti i valori di stato delle celle a 0 (passivi)
3. Porre $s_s(0) = 1$ (Nodo di ingresso attivato)
4. $t = t + 1$
5. Aggiornare i valori di stato di tutte le celle secondo la regola $s_i(t+1) = s_p(t) \vee s_q(t) \vee \dots \vee s_r(t)$
6. Se $s_T(t) = 1$, fermarsi (Nodo utenza attivato), altrimenti
7. Se $t < m - 1$, andare al passo 4. Altrimenti
8. $s_T(m-1) = 0$ (Nodo utenza inattivo): non esiste una connessione da S a T

Al fine di mostrare il funzionamento dell'algoritmo riproduciamo l'esempio di [Yoo et al., 1988] e [Rocco et al., 2002]. Il sistema considerato è riportato in Figura 4.1.

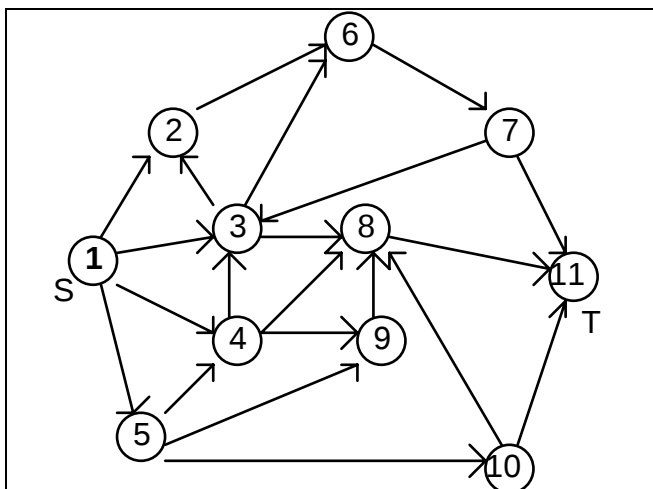


Figura 4.1: Configurazione della rete all'iterazione 1. La sorgente S (1) ed il bersaglio T (11) sono evidenziati. Il nodo di ingresso S è l'unico attivo (numero in neretto).

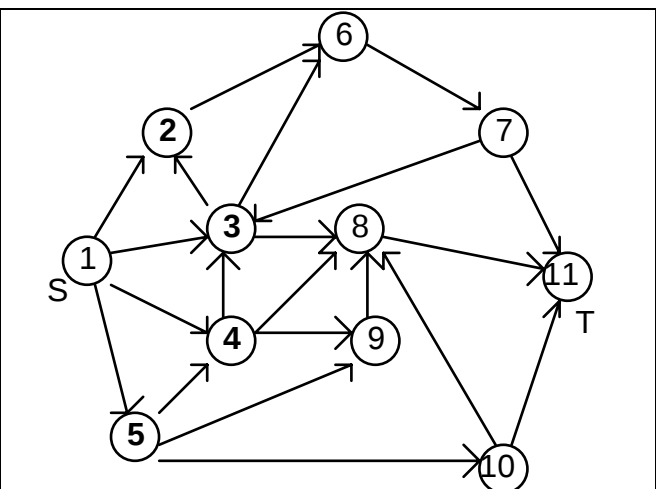


Figura 4.2: Iterazione 2: i nodi 2, 3, 4 e 5 sono attivi (numeri in neretto).

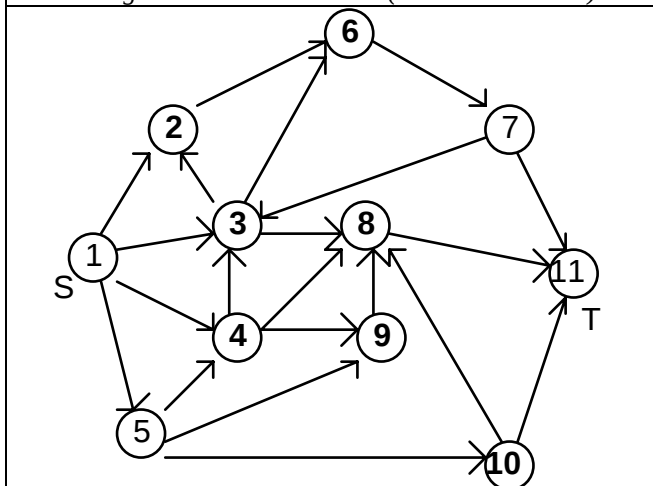


Figura 4.3: I nodi 2, 3, 4, 6, 8, 9 e 10 sono attivi.

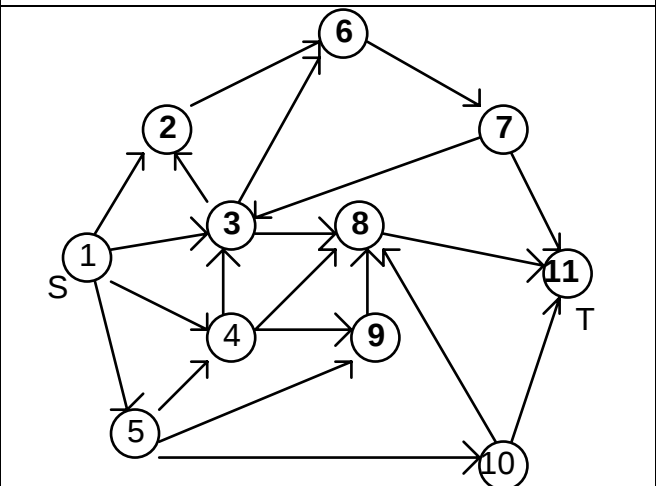


Figura 4.4: Iterazione 4: il nodo T (11) è stato attivato. Esiste una connessione tra S e T.

Dal punto di vista dell'evoluzione fisica del sistema, l'impulso di attivazione si propaga attraverso le connessioni della rete, come illustrato nelle Figure 4.1-4.4. Inizialmente solo il nodo S (1) è attivo, mentre i rimanenti sono in stato passivo (Figura 4.1). All'iterazione 2, i nodi 2,3,4,5 vengono attivati (Figura 4.2). All'iterazione successiva, i nodi 6,8,9 e 10 vengono attivati, mentre i nodi 2,3 e 4 rimangono attivi, dal momento che possiedono tutti un nodo attivo nel proprio intorno (Figura 4.3). Nell'iterazione seguente, i nodi 8 e 10 attivano T (il nodo 11). Dal momento che il nodo T è stato raggiunto, esiste un percorso di connessione da S a T (Figura 4.4).

La valutazione di questa rete è stata effettuata mediante l'implementazione di un programma Matlab per la simulazione dell'evoluzione del corrispondente Automa Cellulare monodimensionale: assegnata la configurazione della rete sotto forma di matrice e stabilita la posizione del nodo di ingresso S (qui 1) e di utenza T (qui 11), l'esistenza di una connessione S-T viene determinata applicando successivamente a tutte le celle la suddetta regola di transizione ad ogni passo temporale. L'output di evoluzione dell'Automa Cellulare per 6 iterazioni successive è quello riportato in Figura 5.

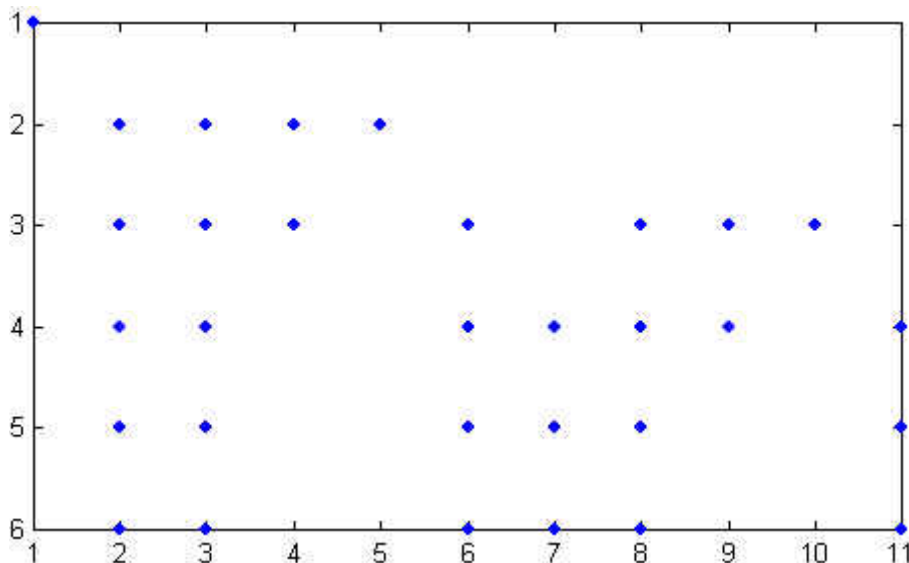


Figura 5. In ordinata è posto l'asse dei passi temporali, rivolto verso il basso, mentre in ascissa sono posti gli indici delle celle (nodi): i punti di una riga rappresentano i nodi attivi nella rete al passo considerato. Al passo 1, solo il nodo S è attivo. Al passo 2 divengono attivi i nodi 2,3,4 e 5. Poi alla terza iterazione si attivano i nodi 6,8,9 e 10, mentre 2,3 e 4 rimangono attivi dal passo precedente. Infine alla quarta iterazione il nodo 11 (T) viene attivato: esiste una connessione S-T per la rete.

Supponiamo ora che si sia riusciti a determinare l'esistenza, per la rete considerata, di un percorso di connessione S-T e che intervenga un cambiamento di topologia della maglia di connessioni quale può essere un'eliminazione di nodi o archi. In tali condizioni, non è necessario ripetere *ab initio* i calcoli di propagazione dell'impulso di attivazione a partire dalla configurazione iniziale di sola sorgente attivata nell'Automa Cellulare, ma si procede, inversamente, a disattivare i nodi i cui intorno risultino vuoti a causa di cambiamenti nella rete. Ad esempio si consideri la rete di Figura 4, in cui gli archi (2,6) , (7,3) e (3,6) vengano eliminati. Lo stato di connessione della rete, verificato mediante l'Automa Cellulare, è mostrato in Figura 6.1 e prevede inizialmente che tutti i nodi siano attivi a seguito dell'unione delle attivazioni conseguite nelle prime quattro iterazioni dell'algoritmo (Figure 4 e 5).

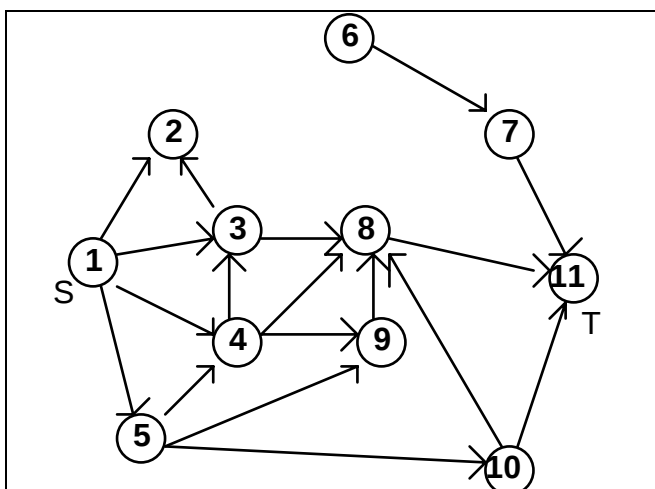


Figura 6.1: Cambiamenti di configurazione nella rete: gli archi (2,6) , (7,3) e (3,6) sono stati rimossi.

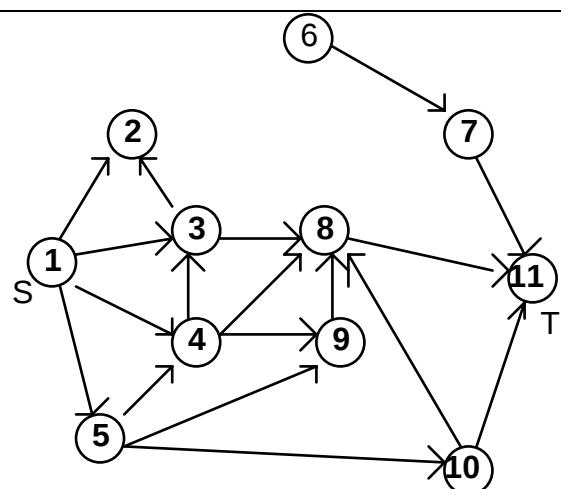


Figura 6.2: Iterazione 2: il nodo 6 diventa passivo.

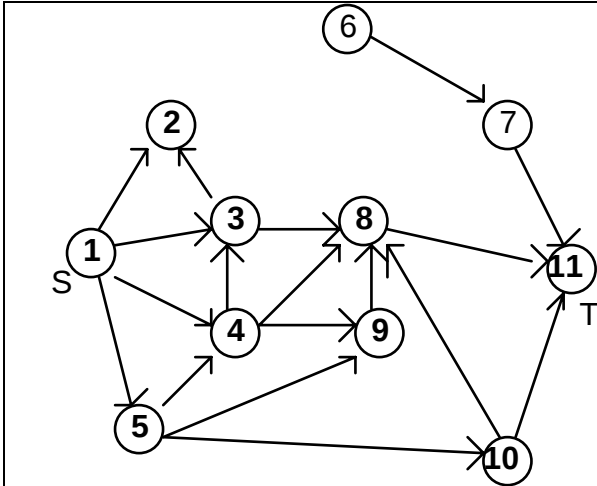


Figura 6.3: Iterazione 3: anche il nodo 7 diventa passivo

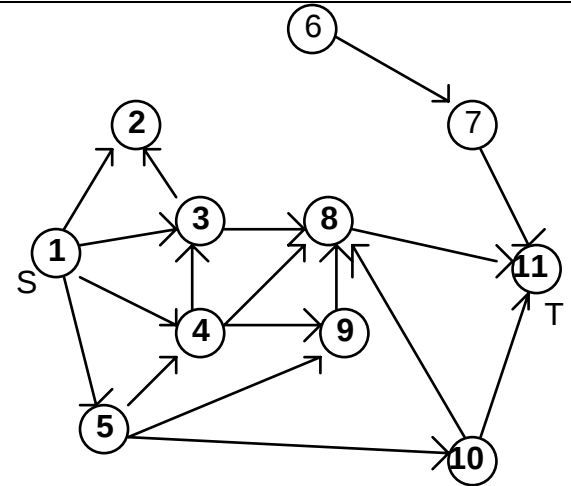


Figura 6.4: Iterazione 4: T è attivo; esiste connessione S-T.

Iniziando l'aggiornamento dell'Automa Cellulare a partire da tale configurazione, si può vedere che all'iterazione successiva il nodo 6 viene disattivato, perchè il suo intorno è vuoto. Nell'iterazione successiva, il nodo 7 passa in stato passivo. Tuttavia, il nodo utenza T (11) rimane attivo, garantendo la connessione S-T.

Per la simulazione dell'Automa Cellulare a partire dalla configurazione di Figura 6.1, nel programma Matlab precedentemente citato la matrice di configurazione della rete viene inizializzata ponendo a zero gli elementi corrispondenti agli archi rimossi. L'evoluzione dinamica dell'Automa Cellulare è riportata in Figura 7.

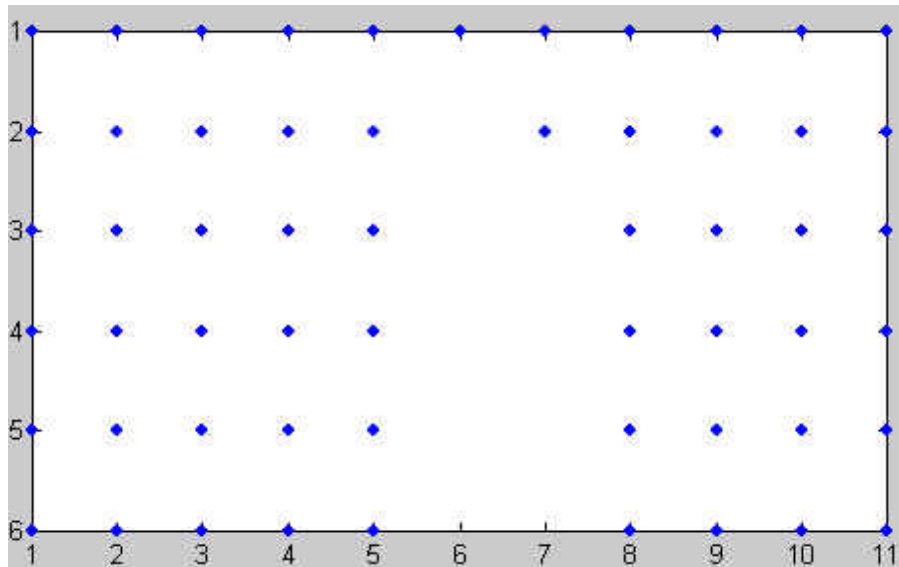


Figura 7. In ordinata è posto l'asse dei passi temporali dell'iterazione. In ascissa sono mostrati gli indici delle celle (nodi) della rete. I punti di ogni riga rappresentano i nodi attivi al passo temporale considerato.

3.2 Valutazione dell'affidabilità di una rete magliata

Nelle applicazioni pratiche reali, le connessioni tra i nodi di una rete magliata possono guastarsi con certe probabilità. Per tenere conto di questo aspetto, supponiamo che il generico elemento di connessione (arco) j_i dal nodo j al nodo i possa anch'esso avere due stati, attivo ($w_{ji} = 1$) o guasto ($w_{ji} = 0$), con probabilità p_{ji} e $q_{ji} = 1 - p_{ji}$ rispettivamente. La variabile di stato w_{ji} definisce lo stato operativo dell'elemento di connessione. La regola di transizione che governa l'evoluzione della generica cella i dell'Automa Cellulare rappresentativo dello stato della rete consiste nell'applicazione dell'operatore logico OR ($\vee$) sui risultati dell'operatore logico AND ($\wedge$), a loro volta applicati agli stati dei nodi del suo intorno ed agli stati della loro connessione con i :

$$s_i(t+1) = [s_p(t) \wedge w_{pi}] \vee [s_q(t) \wedge w_{qi}] \vee \dots \vee [s_r(t) \wedge w_{ri}] , \quad p, q, \dots, r \in N_i$$

L'affidabilità p_{ST} della rete, ovvero la probabilità che esista una connessione S-T, può essere calcolata attraverso i seguenti passi: i) campionare mediante il metodo Monte Carlo (MC) un gran numero N di realizzazioni casuali degli stati, attivo o guasto, degli archi di connessione; ii) per ciascuna realizzazione verificare, mediante l'algoritmo Automa Cellulare illustrato nella precedente Sezione 3.1, se esiste un percorso S-T. Il rapporto tra il numero dei percorsi S-T esistenti ed il numero totale di realizzazioni campionate rappresenta una stima dell'affidabilità della rete. L'algoritmo di base procede attraverso i seguenti passi:

1. $n = 0$
2. $n = n + 1$
3. Simulare con MC una realizzazione degli stati degli archi di connessione w
4. Applicare l'algoritmo Automa Cellulare precedentemente illustrato per stabilire se esiste una connessione S-T
5. Se un percorso esiste, aggiornare il contatore N^+ degli stati di sistema "con connessione S-T"
6. Se $n < N$, tornare al punto 2. Altrimenti,
7. Affidabilità della rete $p_{ST} = \frac{N^+}{N}$

Un vantaggio rilevante dell'approccio proposto consiste nel fatto che, come illustrato alla fine della Sezione 3.1, la verifica della connessione della rete mediante Automa Cellulare può essere fatta, per ogni realizzazione casuale dello stato della rete, a partire dalla realizzazione precedente MC. Questo consente un significativo risparmio di CPU time rispetto al calcolo della configurazione della rete *ab initio*.

3.3 Identificazione del percorso più affidabile

Il problema di identificare il percorso più affidabile in una rete di nodi interconnessi può essere inserito nel contesto della ricerca del percorso più breve tra un nodo S ed un nodo T [Smith, 1982]. In passato questo problema è stato affrontato mediante algoritmi di tipo polinomiale [Evans and Minieka, 1992], mentre più recentemente sono stati proposti anche approcci basati sulle reti neurali [Araujo et al., 2001]. Tuttavia, metodi più efficienti, quali gli Automi Cellulari, possono essere applicati con successo quando siano richiesti calcoli veloci e ripetuti del cammino più breve.

Si voglia identificare il percorso di massima affidabilità $p_{ST} = \prod_{\{j,i \in ST\}} p_{ji}$, dove $\{j,i \in ST\}$ è l'insieme di archi di

connessione ST. Applicando il logaritmo negativo, si ha:

$$-\log(p_{ST}) = -\sum_{\{j,i \in ST\}} \log(p_{ji}) > 0$$

ed il problema si riduce alla determinazione del percorso che minimizza $-\log(p_{ST})$.

Nella modellazione ad Automa Cellulare, ad ogni arco attivo ji viene associato il valore $-\log(p_{ji})$, mentre agli archi non connessi viene associato un valore infinito.

Lo stato della generica cella i (nodo i) al tempo t è rappresentato da un vettore a due componenti:

$$s_i(t) = [s_i^1(t), s_i^2(t)],$$

dove la prima componente registra l'indice del nodo precedente nel percorso e la seconda accumula il valore del logaritmo negativo della affidabilità lungo il tratto di cammino percorso fino ad i .

La regola di transizione che governa l'evoluzione della cella i -esima esegue le seguenti operazioni:

- i. calcolo dei valori della funzione obiettivo $L_{ji}(t+1) = s_j^2(t) - \log(p_{ji})$ per tutti i nodi $j \in N_i$
- ii. individuazione del nodo j^* che dà luogo al minimo valore L_{j^*i} : questo nodo sarà il successivo ad i lungo il percorso di massima affidabilità
- iii. aggiornamento di $s_i^2(t+1) = L_{j^*i}(t+1)$

Per quanto riguarda la seconda operazione, è possibile che due o più nodi j dell'intorno N_i diano luogo al medesimo valore di L_{ji} ; in tal caso, si prende come j^* il nodo che dà luogo anche al minimo $s_j^2(t)$.

Poiché, come detto in precedenza, il percorso più lungo da S a T consiste di $m-1$ nodi, esso può essere determinato in $O(m)$ passi di iterazione.

L'algoritmo di base per l'individuazione del percorso S-T di massima affidabilità consiste nei seguenti passi:

1. $t = 0$
2. Inizializzare lo stato di S: $s_s(0) = [S, 0]$
3. Inizializzare lo stato di tutte le celle $i \neq S$: $s_i(0) = [i, \infty]$
4. $t = t + 1$
5. Aggiornare tutti gli stati delle celle eseguendo le operazioni i. – iii. della regola di transizione precedentemente illustrata
6. Se il processo non ha raggiunto la stagnazione e $t < m - 1$ andare al punto 4. Altrimenti, stop.

Al termine dell'esecuzione dell'algoritmo, le celle con secondo componente del vettore di stato non infinito individuano il percorso di massima affidabilità. Il corrispondente logaritmo negativo del valore di massima affidabilità è contenuto nel secondo componente del vettore di stato del nodo T. Se questo valore è infinito, allora vuol dire che non esiste alcun percorso di connessione ST.

Come esempio di applicazione dell'algoritmo di identificazione del percorso di massima affidabilità, si consideri la rete in Figura 8 [Rocco et al., 2002]. La Tabella 8.1 presenta l'affidabilità di ogni arco ed il corrispondente valore $-\log$. Il percorso 1 – 3 – 5 – 7 viene correttamente individuato dall'algoritmo quale quello di massima affidabilità tra i nodi 1 e 7.

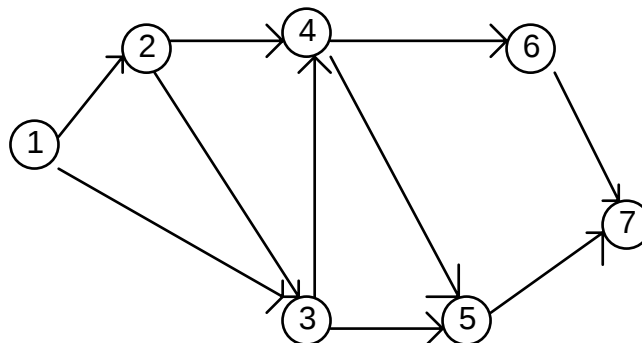


Figura 8.: Configurazione della rete [Rocco et al., 2002].

(i,j)	r_{ij}	$-\log(r_{ij})$
1,2	0.20	0.69897
1,3	0.90	0.04576
2,3	0.60	0.22185
2,4	0.80	0.09691
3,4	0.10	1.00000
3,5	0.30	0.52288
4,5	0.40	0.39794
4,6	0.35	0.45593
5,7	0.25	0.60206
6,7	0.50	0.30103

Tabella 8.1: Dati per la rete in Figura 8 [Rocco et al., 2002].

4. Conclusioni

In questo lavoro si sono esaminate le potenzialità degli Automi Cellulari come strumento di modellazione di problemi fisici la cui evoluzione sia descrivibile in termini di reti magliate o grafi. In modo particolare è stato esaminato il problema della verifica dell'esistenza di una connessione S-T e si è mostrato come in questo caso mediante un algoritmo Automa Cellulare si possa pervenire agevolmente alla soluzione, con evidente guadagno dal punto di vista del costo computazionale rispetto alle tecniche risolutive classiche impiegate in passato. Si è inoltre mostrato come l'impiego di tale algoritmo permetta di evitare di ripetere *ab initio* i calcoli di evoluzione della rete qualora ne venga

modificata la topologia mediante eliminazione di nodi od archi, anche in questo caso con evidente risparmio di tempo richiesto per l'elaborazione. Successivamente si è evidenziato come l'algoritmo degli Automi Cellulari possa essere accoppiato efficacemente con un campionamento Monte Carlo per tenere conto della eventualità che gli archi possano deteriorarsi passando a stato passivo. L'impiego integrato delle due tecniche consente di pervenire ad una stima dell'affidabilità del sistema. Infine si è mostrato che anche il problema dell'identificazione del percorso ST a massima affidabilità può essere affrontato mediante un algoritmo Automa Cellulare in modo più efficiente rispetto agli approcci basati su algoritmi di tipo polinomiale proposti in passato.

Bibliografia

- [Aggarwal, 1975] Aggarwal K.K., *A simple method for reliability evaluation of a communication system*. IEEE Trans Commun 1975; COM-23:563-5.
- [Araujo et al., 2001] Araújo, F., Ribeiro, B., Rodrigues, L. *A neural network for shortest path computation*. IEEE Trans Neural Networks (2001); 12(5): 1067 – 72.
- [Aven, 1987] Aven T. Availability evaluation of oil/gas production and transportation systems. Reliab Engng 1987;18:35-44.
- [Aven, 1988] Aven T. Some considerations on reliability theory and its applications. Reliab Engng Syst Saf 1988;21:215-23.
- [Bar-Yam, 1997] Bar-Yam, Y., *Dynamics of Complex Systems*, Addison Wesley, 1997.
- [Berkelamp et al., 1982] Berkelamp, E.R., J.H. Conway, and R.K. Guy, *Winning Ways for Your Mathematical Plays*, vol 2, Academic Press (1982), Chapter 25.
- [Billinton and Allan, 1992] Billinton, R., Allan, R.N. *Reliability evaluation of engineering systems, concepts and techniques*, 2nd ed. New York, Plenum Press, (1992).
- [Evans and Minieka, 1992] Evans, J., Minieka, E., *Optimization algorithms for network and graphs*. New York, Marcel Dekker, (1992).
- [Fishman, 1986] Fishman, G., *A Comparison of four Monte Carlo methods for estimating the probability of s-t connectedness*. IEEE Trans Reliab (1986); R-35(2):145-155
- [Jane et al., 1993] Jane CC, Lin JS, Yuan J. Reliability evaluation of a limited-flow network in terms of MC sets. IEEE Trans Reliab 1993;R-42:354-61.
- [Kubat, 1989] Kubat P. Estimation of reliability for communication/computer networks simulation/analytical approach. IEEE Trans Commun 1989; 37:927-33.
- [Reingold et al., 1977] Reingold, E., Nievergelt, J., Deo, N., *Combinatorial algorithms: theory and practice*. New Jersey, Prentice-Hall (1982).
- [Rocco et al., 2002] Rocco S., C.M., Moreno, J.A., *Network reliability assessment using a cellular automata approach* Reliability Engineering and System Safety 78 (2002):289 – 295.
- [Samad, 1987] Samad MA. An efficient algorithm for simultaneously deducing MPs as well as cuts of a communication network. Microelectron Reliab 1987; 27:437-41
- [Smith, 1982] Smith, D., *Network optimization practice* Chichester, Ellis Horwood (1982).
- [Toffoli, 1977] Toffoli, T., *Cellular Automata Mechanics*, Technical Report 208, Comp. Comm. Sci. Dept., The University of Michigan (1977).
- [von Neumann, 1951] von Neumann, J., "The general and logical theory of automata", in *Cerebral Mechanisms in Behavior: The Hixon Symposium*, L.A. Jeffress, ed., Wiley (1951) 1-32.
- [Wolfram, 1985a] Wolfram, S., "Origins of randomness in physical systems", *Phy. Rev. Lett.* **55** (1985), 449-452.
- [Wolfram, 1985b] Wolfram, S., "Undecidability and intractability in theoretical physics", *Phy. Rev. Lett.* **55** (1985), 735-738.
- [Wolfram, 1985c] Wolfram, S., "Cryptography with cellular automata", in *CRYPTO '85 Proceedings: Advances in Cryptology*, Santa Barbara, California (1985)
- [Wolfram, 1986] Wolfram, S, ed., *Theory and Applications of Cellular Automata*, World Scientific (1986).
- [Yeh et al., 1998] Yeh WC, Revised A. Layered-network algorithm to search for all d-minpaths of a limited-flow acyclic network. IEEE Trans Reliab 1998;46:436-42
- [Yoo et al., 1988] Yoo, YB, Deo, N. *A comparison algorithm for terminal-pair reliability* IEEE Trans Reliab (1988) ; 37(2).